

## Capítulo 2

# Determinação Teórica dos Parâmetros Relacionados à Qualificação do Enlace do Assinante

### 2.1 Considerações Iniciais

A modelagem da linha de transmissão de par trançado é muito utilizada como uma maneira de fazer a qualificação do enlace. Embora simulada, ela se torna um fator importante no planejamento e implantação dos serviços DSL. Além do mais, os modelos desenvolvidos, quando precisos, permitem estimar uma topologia da rede do assinante em diferentes situações.

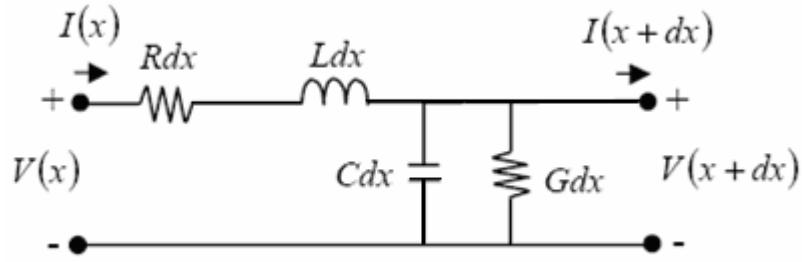
Os modelos genéricos de cabos DSL foram criados para descrever precisamente o comportamento dos parâmetros primários e secundários dos cabos de par trançado [26]. A utilização desses modelos permite conhecer as características físicas de um enlace DSL. Embora muitos desses modelos sejam empíricos, eles são amplamente utilizados como referências quando se necessita de uma análise comparativa para um resultado de uma medição. Diante disso, neste capítulo serão descritos alguns modelos de linhas utilizados para cabos DSL, que servirão de referências nas análises dos resultados deste trabalho.

### 2.2 Características Elétricas do Par Trançado

#### 2.2.1 Parâmetros Primários

Os parâmetros primários de um cabo de par trançado de cobre são: a Resistência ( $R$ ), a Indutância ( $L$ ), a Capacitância ( $C$ ) e a Condutância ( $G$ ), que são variáveis em função da frequência. Assumindo que o cabo de par trançado é modelado como uma linha de transmissão, este pode ser descrito por um incremento de circuito equivalente formado por uma resistência em série ( $R$ ), uma indutância em série ( $L$ ), uma capacitância em paralelo ( $C$ ) e

uma condutância em paralelo ( $G$ ), como ilustrado Figura 2.1, para um elemento infinitesimal  $dx$  de uma linha de transmissão.



**Figura 2.1:** Modelo infinitesimal para uma linha de transmissão [26].

Um segmento de uma linha de transmissão pode ser visto como uma cascata desses elementos infinitesimais de comprimento. Os valores dos parâmetros primários são expressos por unidade de comprimento e são dependentes da frequência. Sem perda de generalidade, a impedância série pode ser representada por uma resistência  $Rdx$  e a indutância  $Ldx$ , ambos os parâmetros expressos por unidade de comprimento. A impedância paralela é representada por uma resistência paralela (de admitância  $Gdx$ ) e uma capacitância  $Cdx$ , onde  $G$  é a condutância por unidade de comprimento e  $C$  é capacitância por unidade de comprimento. Para o cálculo dos parâmetros primários de um tipo de cabo específico são usados os modelos das recomendações da ITU-T (*Internacional Telecommunication Union – Telecommunication*). Os parâmetros primários são geralmente determinados experimentalmente por entidades como a ITU-T ou companhias telefônicas que publicam os seus resultados encontrados. Além do mais, esses resultados experimentais levam a determinações de expressões analíticas para os parâmetros primários para diferentes tipos de cabos.

### 2.2.2 Parâmetros Secundários

Os parâmetros secundários são também conhecidos por constante de propagação e impedância característica. Considerando um elemento infinitesimal  $dx$  do circuito equivalente de uma linha de transmissão tal como ilustrado na Figura 2.1 e aplicando-se as equações de *Kirchhoff* a este circuito, pode-se obter, as seguintes equações diferenciais:

$$dV = -(R + jL\omega)Idx \quad (2.1)$$

$$dI = -(G + jC\omega)Vdx \quad (2.2)$$

Portanto,

$$\frac{dV}{dx} = -(R + jL\omega)I \quad (2.3)$$

$$\frac{dI}{dx} = -(G + jC\omega)V \quad (2.4)$$

Então,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -(R + jL\omega) \quad (2.5)$$

$$\frac{dI}{dx} = (R + jL\omega)(G + jC\omega)V \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -(G + jC\omega) \quad (2.7)$$

$$\frac{dV}{dx} = (R + jL\omega)(G + jC\omega)I \quad (2.8)$$

Onde  $V \equiv V(x, \omega)$  e  $I \equiv I(x, \omega)$  são a tensão e a corrente a uma distância  $x$  da linha de transmissão para uma dada frequência  $f$ . As Equações (2.5) e (2.6) podem ser re-escritas da seguinte maneira.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I \quad (2.10)$$

Onde a quantidade complexa é a constante de propagação, na qual é o primeiro parâmetro secundário, e expresso pela equação (2.11).

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \equiv \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (2.11)$$

Pela separação da Equação (2.11) em parte real e imaginária, pode-se obter a coeficiente de atenuação  $\alpha$  e coeficiente de fase  $\beta$  respectivamente [29]. Estes dois parâmetros são definidos de acordo com as seguintes equações:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (2.12)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (2.13)$$

Encontradas as soluções gerais das equações diferenciais (2.9) e (2.10), obtem-se as seguintes Equações.

$$V(x, f) = V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{\gamma x} \quad (2.14)$$

$$I(x, f) = I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{\gamma x} \quad (2.15)$$

onde  $V_0^+$  e  $V_0^-$  são as tensões no sentido positivo e no sentido negativo, respectivamente. Da mesma maneira,  $I_0^+$  e  $I_0^-$  são as correntes no sentido positivo e negativo, respectivamente.

Aplicando ambas as soluções (2.14) e (2.15) às equações diferenciais, (2.9) para a tensão e (2.10) para corrente tem-se o seguinte resultado:

$$Z_0(\omega) = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad (2.16)$$

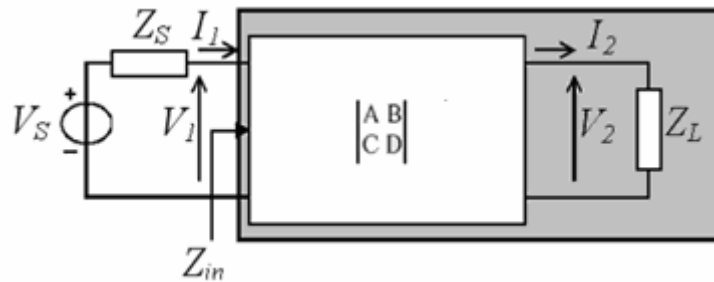
Este resultado é igual a uma constante denominada de impedância característica da linha de transmissão do par trançado, que é o segundo parâmetro dos parâmetros secundários.

Para as altas frequências, a influência de  $L$  e  $G$  é predominante, isto é,  $\omega L \gg R$  e  $\omega C \gg G$ . Então a impedância característica é constante e puramente resistiva, podendo ser expressa por [26]:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.17)$$

### 2.3 A Matriz ABCD

Cada par trançado pode ser exatamente modelado como uma rede de duas portas (*two-port network-2PN*). Dentro da teoria de linha de transmissão, a maneira mais comum de representar uma 2PN é usar a teoria de matriz de transmissão, também conhecida como matriz ABCD [30]. A Fig. 2.2 mostra um modelo de um enlace telefônico do assinante usando a matriz ABCD.



**Figura 2.2:** 2PN representação da linha do assinante [30].

A relação entre a corrente e a tensão (no domínio da frequência) na rede de duas portas 2PN é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = T_F \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  $T_F$  é a matriz de transmissão direta ou matriz ABCD [30]. Os coeficientes ABCD, os quais são funções complexas da frequência, caracterizam completamente as propriedades elétricas de uma rede 2PN e são definidos como:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} ; B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} ; C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} ; D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad (2.19)$$

Para um cabo de comprimento  $l$ , estes coeficientes e a corresponde matriz de transmissão  $T_F$  são [26]:

$$\begin{cases} A = D = \cosh \gamma l \\ B = Z_0 \sin \gamma l \\ C = \frac{1}{Z_0} \sin \gamma l \end{cases} \Rightarrow T_F = \begin{vmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sin \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sin \gamma l & \cosh \gamma l \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.3.1 Impedância de Entrada

A impedância de entrada de um circuito é definida como a razão entre a tensão aplicada na entrada de tal circuito e a corrente resultante como mostrado na Figura 2.2. A equação que expressa a impedância de entrada de uma linha de transmissão em função dos parâmetros ABCD é dada por [26]:

$$Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Função de Transferência

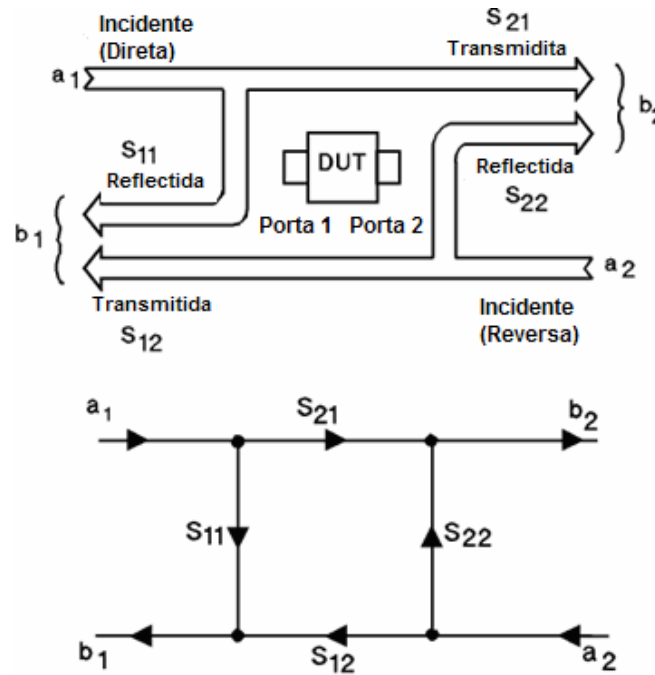
De uma maneira em geral, a função de transferência de um sistema pode ser definida como uma expressão matemática que descreve a relação entre a entrada e a sua saída. A Função de Transferência depende da frequência e diminui em módulo com o aumento da mesma. É um importante parâmetro usado para definir o comprimento máximo do cabo e a sua resposta em frequência.

Para o modelo de rede de duas portas da Figura 2.2, a função de transferência pode ser determinada através da equação [26]:

$$\frac{V_2}{V_s} = H_f(f) = \frac{Z_L}{AZ_L + B + CZ_L Z_s + DZ_s} \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Parâmetro de Espalhamento ( $S_{11}$ )

O termo “parâmetro de espalhamento” é derivado dos parâmetros que representam um espalhamento ou a separação do sinal através de um *device under test* (DUT) conforme mostrado na Figura 2.3. Estes sinais espalhados são ondas refletidas e transmitidas que, são produzidas quando uma onda incidente encontra um dispositivo [31].



**Figura 2.3:** Parâmetro-S de um dispositivo de duas portas.

Os Parâmetros-S se tornam importante quando a frequência de operação é bastante alta, dessa forma os elementos do circuito representa uma fração significativa do comprimento de onda (aproximadamente um décimo de um comprimento de onda). Também, quando a frequência aumenta para faixa de microondas fica difícil medir a tensão e a corrente

necessárias para medidas da impedância. Para superar este problema, uma razão da onda incidente e refletida é utilizada. Isto é mostrado na Figura 2.3 e é definida na equação a seguir.

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{a_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad (2.23)$$

A equação (2.23) determina que, para obtenção do parâmetro  $S_{ij}$ , se forneça energia à porta  $j$  e se meça a resposta na porta  $i$ . É importante observar que todas as portas, exceto a porta de entrada do sinal, devem estar com as terminações perfeitamente casadas com a impedância característica do dispositivo utilizado.

De acordo com a Equação (2.24) uma matriz de espalhamento é utilizada para determinar as relações (2.25) e (2.26) entre os parâmetros- $S$  e a energia transmitida e refletida nas duas portas.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (2.25)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (2.26)$$

Sendo  $a_i$  e  $b_i$  a raiz quadrada das ondas de potência incidente e refletida, respectivamente.

O parâmetro de espalhamento de uma determinada porta é obtido quando as outras portas se encontram casadas. Nesta condição, para um sistema de duas portas conforme a Figura 2.2, tem-se:

$$S_{11} = \left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_2^-=0} \quad (2.27)$$

$$S_{12} = \left. \frac{V_1^-}{V_2^+} \right|_{V_1^-=0} \quad (2.28)$$



$$S_{21} = \left. \frac{V_2^+}{V_1^+} \right|_{V_2^- = 0} \quad (2.29)$$

$$S_{22} = \left. \frac{V_2^+}{V_2^-} \right|_{V_1^+ = 0} \quad (2.30)$$

Sabendo que as ondas de tensão são definidas de acordo com uma impedância de referência [32], tem-se:

$$V_i^\pm = V_i \pm Z_{ref} I \quad (2.31)$$

Definindo a impedância de referência para a porta 1 como [32]:

$$Z_{ref} = Z_g = 100\Omega \quad (2.32)$$

Representando o esquema da Figura 2.2 de forma simplificada, usando a notação da impedância de entrada tem-se:

$$V_1 = Z_{in} I_1 \quad (2.33)$$

Substituindo em (2.27), as equações para  $V_1^+$  e  $V_1^-$  provenientes de (2.31), tem-se:

$$S_{11} = \frac{V_1 - Z_{ref1} I_1}{V_1 + Z_{ref1} I_1} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32) e (2.33) em (2.34) tem-se:

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_S}{Z_{in} + Z_S} \quad (2.35)$$

Substituindo  $Z_{in}$  por A/C definida como a impedância observada na porta 1 devido a toda rede [32]. A Equação (2.35) pode ser rescrita como:

$$S_{11} = \frac{A - Z_s.C}{A + Z_s.C} \quad (2.36)$$

## 2.4 Modelos Genéricos dos Cabos DSL

Os modelos genéricos de cabos DSL foram criados para descrever precisamente o comportamento dos parâmetros primários e secundários dos cabos de par trançado [26]. A utilização desses modelos permite conhecer as características físicas de um enlace DSL. Embora muitos desses modelos sejam empíricos, eles são amplamente utilizados pelos diversos grupos de pesquisas para criação de novos modelos. Além do mais, os modelos genéricos podem ser usados como referências, quando se necessita de uma análise comparativa em uma medição e um modelo teórico de cabo. A seguir, alguns dos principais modelos genéricos de cabos DSL são descritos.

### 2.4.1 Modelos #0 e #1 da *British Telecom* (RLCG Modelling)

Esses dois modelos empíricos foram primeiramente propostos por *John Cook* da *British Telecom* [27] [28] para caracterizar cada parâmetro primário de um cabo DSL, conforme descrição a seguir.

#### 2.4.1.1 Modelo Empírico para Resistência

Este modelo tem como base o efeito conhecido como *Skin* [26]. O efeito *Skin* afeta o fluxo de corrente nas altas frequências, a resistência do fio aumenta drasticamente. Uma vez que este efeito se torne dominante, ele aumenta proporcionalmente a  $\sqrt{f}$  [26]. Já para as frequências mais baixas, o efeito *Skin* não é dominante e a resistência do fio se aproxima de uma resistência DC. Diante disso, o modelo empírico para resistência é dado pela seguinte Equação:

$$R(f) = \sqrt[4]{(R_{oc}^4 + a_c f^2)} \quad (2.37)$$

Para os fios de cobre o modelo empírico pode ser obtido pela extensão da Equação (2.37) [26]:

$$R(f) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{(R_{oc}^4 + a_c f^2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(R_{os}^4 + a_s f^2)}}} \quad (2.38)$$

onde  $R_{oc}$  e  $R_{os}$  são as resistências DC para o cobre e para aço [26]. A separação do efeito *Skin* para o cobre e para o aço, é dada pelos parâmetros  $a_c$  e  $a_s$ .

#### 2.4.1.2 Modelo Empírico para Indutância

Nas baixas frequências, onde o efeito *Skin* não é dominante, o parâmetro  $L$  demonstra uma indução constante  $L_0$ . No entanto, nas altas frequências, o efeito *Skin* é dominante, sendo assim, o parâmetro  $L_0$  tende a uma indução constante  $L_\infty$ . Como sequência, o modelo empírico para indução foi modelado através da seguinte equação:

$$L(f) = \frac{L_0 + L_\infty \left( \frac{f}{f_m} \right)^b}{1 + \left( \frac{f}{f_m} \right)^b} \quad (2.39)$$

onde  $b$  e  $f_m$  são parâmetros que controlam a transição entre  $L_0$  e  $L_\infty$ , através do eixo da frequência [26].

#### 2.4.1.3 Modelo Apropriado para Condutância

Um modelo apropriado para a condutância do cabo foi criado de acordo com a equação seguinte:

$$G(f) = g_0 f^{g_e} \quad (2.40)$$

onde  $g_o$  e  $g_e$  controlam o comportamento do aumento exponencial da perda do dielétrico [26].

#### 2.4.1.4 Modelo Empírico para Capacitância

Um modelo apropriado para capacitância está representado a seguir:

$$C(f) = C_{\infty} + C_0 f^{-C_e} \quad (2.41)$$

Para um bom dielétrico,  $C_0$  pode ser considerado negligenciado, e o modelo da capacitância é  $C_{\infty}$ . Porém, para os cabos utilizados em DSL este comportamento não é verificado, sendo assim utiliza-se o modelo completo dado pela Equação (2.41) [26].

#### 2.4.5 O Modelo de Linha VUB0

De acordo com as equações 2.20, é possível se perceber a relação existente entre os coeficientes ABCD da matriz de transmissão e os parâmetros secundários  $\gamma$  e  $Z_o$ . Diante disso, o modelo VUB0 (*Vrije Universiteit Brussel*) foi desenvolvido para representar matematicamente uma linha de transmissão de par trançado [32]. Para a caracterização matemática do modelo VUB0, calcula-se o produto da constante de propagação  $\gamma$  e o comprimento  $l$  da linha como uma função da frequência  $s$ ; para isso, quatro parâmetros independentes são definidos:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  [33].

$$\gamma l = \sqrt{Z_s y_p l^2} = \sqrt{a_4 s^4 + a_1 s \sqrt{-s} \frac{J_0}{J_1} + a_1 a_3 s^2 \frac{\psi}{2}} \quad (2.42)$$

Na Equação (2.66)  $\psi$  é uma função auxiliar dependente da frequência  $s$  e dos parâmetros  $a_2$  e  $a_3$ .  $J$  são as funções de Bessel  $J_i = J_i(a_3 \sqrt{-s})$  que dependentes da frequência e do parâmetro  $a_3$ . Os parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  são relacionados com as dimensões geométricas do cabo e com as constantes eletromagnéticas do material utilizado. O parâmetro  $a_4$  é uma função dos parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , é considerado ainda como um parâmetro independente que atribui ao modelo VUB0 um grau maior de liberdade.

$$a_4 = a_1 a_3 \ln(1/\sqrt{a_2}) \quad (2.43)$$

A impedância característica  $Z_0$  é representada como segue e adiciona o parâmetro,  $a_5$ .

$$Z_0 = \mathcal{N} / y_p l = \left( \sqrt{a_4 s^2 + a_1 s \sqrt{-s} J_0 / J_1 + a_1 a_3 s^2 \psi / 2} \right) / a_5 s \quad (2.44)$$

onde  $a_5$  está relacionado aos parâmetros geométricos  $a$ ,  $D$  e  $l$ , com a permissividade elétrica  $\varepsilon$  do dielétrico.

$$a_5 = \frac{\pi \varepsilon}{ar \cosh(D/2a)} \quad (2.45)$$

Sendo assim é possível se expressar as equações para o produto  $\gamma l$  e  $Z_0$  das Equações (2.20) e, conseqüentemente, obter-se os parâmetros  $Z_{in}$ ,  $H(f)$  e  $S_{11}$ .

## 2.5 Considerações Finais

Neste capítulo procurou-se abordar o enlace do assinante como uma representação do modelo de linha de transmissão de par trançado. Além dos parâmetros primários e secundários e ainda o conceito da matriz ABCD utilizada para determinar os parâmetros físicos que foram definidos através da análise destes parâmetros, pode-se obter os parâmetros  $Z_{in}$ ,  $H(f)$  e  $S_{11}$  em nível teórico.

Foram ainda descritos os principais modelos de linhas, que serão utilizados como referências para os resultados das medições deste trabalho. O próximo passo é a descrição da metodologia das medições, utilizando-se os parâmetros físicos descritos.