

## **Capítulo 4**

### **Análise Estatística das Medições em DSL**

#### **4.1 Considerações Iniciais**

Quando se avalia o resultado de medição de um parâmetro físico do enlace DSL é obrigatório que seja dada alguma indicação quantitativa do resultado, de tal forma que aqueles que o utilizam possam avaliar sua confiabilidade. Sem essa indicação, os resultados de medição não podem ser comparados, seja entre eles mesmos ou com valores de referências fornecidos por uma especificação ou por uma norma. É, portanto, necessário que haja um procedimento implementado e compreendido e de aceitação geral para caracterizar a qualidade de uma medição de um determinado parâmetro. Isto requer a aplicação de um tratamento estatístico nos dados, a fim de identificar e isolar dados incoerentes.

Diante disso, neste capítulo apresenta-se uma metodologia para o tratamento estatístico dos dados obtidos nas medições. O objetivo desse tratamento é assegurar que o método utilizado em cada medição realizada seja avaliado, para se chegar a um resultado preciso e confiável para uso posterior nas diversas técnicas de qualificação do enlace digital do assinante.

#### **4.2 Conceitos Fundamentais**

Para subsidiar a análise estatística proposta neste capítulo, faz-se necessário, inicialmente, a introdução de alguns conceitos fundamentais.

Pode-se definir medição como o processo de se encontrar experimentalmente o valor de uma quantidade física, com a ajuda de um meio especial chamado de instrumento de medição. O valor verdadeiro de uma quantidade mensurável é o valor da medida da quantidade física, a qual, idealmente, reflete qualitativamente e quantitativamente a correspondente propriedade do objeto [41].

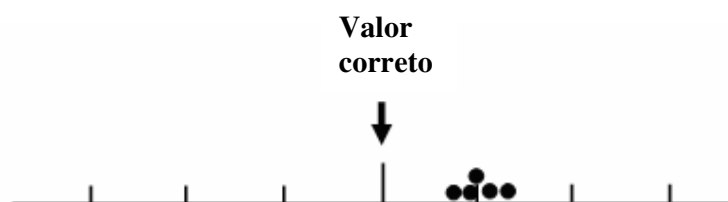
Como os instrumentos de medição são criados através da ação humana, os resultados das medições não são absolutamente precisos. Esta inevitável imperfeição é expressa pela

incerteza relacionada à sua própria medição. A incerteza de medição é o valor de uma medida que permanece com uma dada probabilidade [41], enquanto que o erro de medição é o desvio do resultado em relação ao valor verdadeiro da quantidade mensurável. Portanto, o termo erro é usado para caracterizar os componentes da incerteza [41].

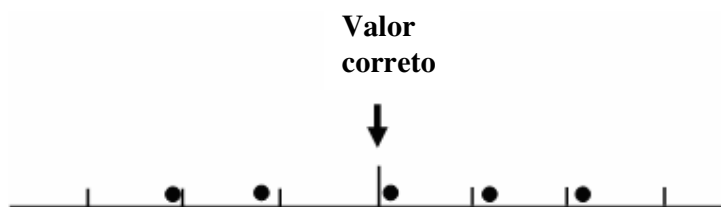
Uma importante classificação dos erros de medição é baseada nas suas propriedades. Neste sentido são definidos os erros sistemáticos e aleatórios. Um erro é dito ser sistemático se ele permanece constante ou muda de maneira regular em todas as repetidas medições na mesma proporção [41].

Quando uma medição é repetida muitas vezes, seguindo as mesmas condições, são observadas variações nos resultados obtidos que se propagam mais ou menos fora de um valor médio, tais variações ocorrem de um modo imprevisível, o erro é dito aleatório.

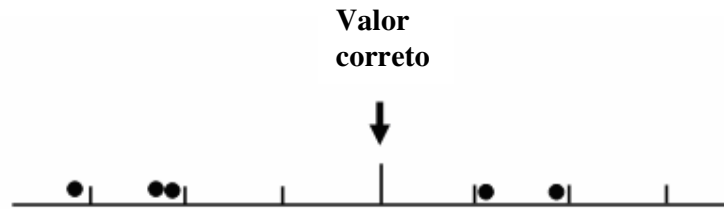
Outros dois importantes conceitos são exatidão e precisão. Exatidão é a qualidade que expressa como os resultados de uma medição, que foi repetida, estão próximos um do outro. Quanto mais próximos os resultados, mais exata a medição. No entanto os erros aleatórios afetam a exatidão da medição. A precisão é a qualidade que expressa como os resultados estão próximos do valor verdadeiro da quantidade de interesse. Portanto, os erros sistemáticos – também conhecidos como *bias* – afetam a precisão da medição, quer dizer, a proximidade dos resultados de acordo com o valor verdadeiro. As figuras seguintes resumem os conceitos de exatidão e precisão.



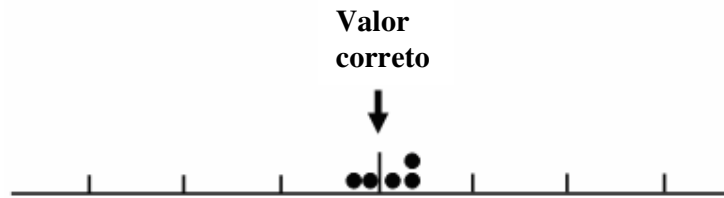
**Figura 4.1 a:** Resultados exatos e imprecisos.



**Figura 4.1 b:** Resultados inexatos e precisos.



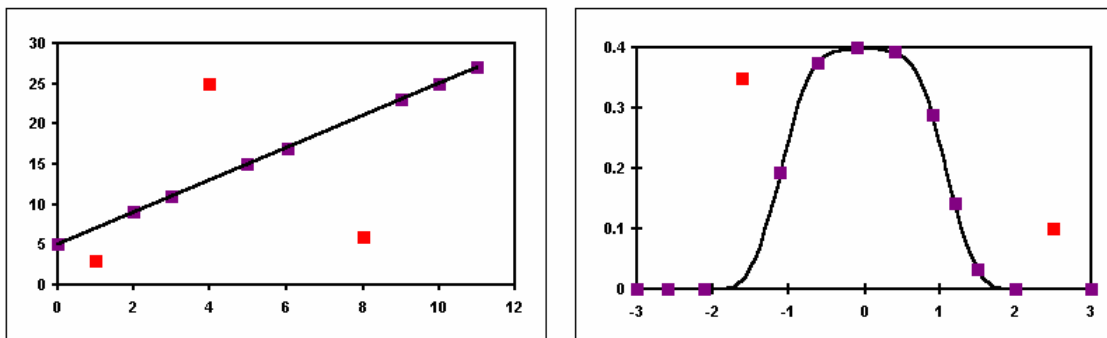
**Figura 4.1 c:** Resultados inexatos e imprecisos.



**Figura 4.1 d:** Resultados exatos e precisos.

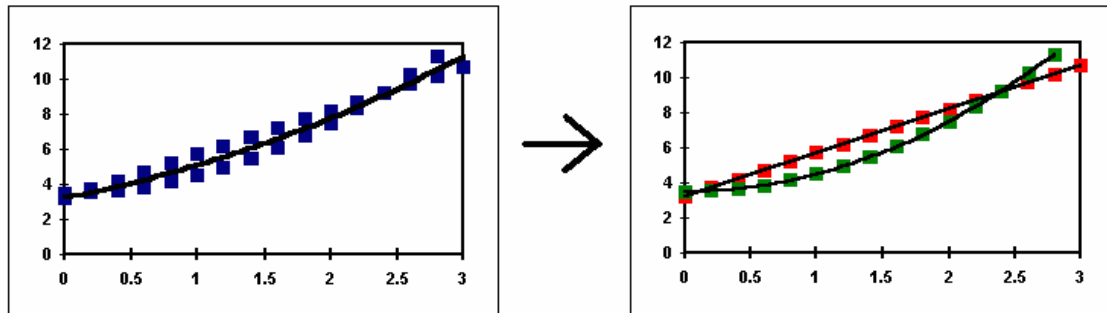
### 4.3 Detecção de *Outliers*

Os erros de medição podem também ser classificados como *outliers* e *blunders*. *Blunders* ocorrem como resultado dos erros feitos pelo experimento [42]. O termo *outliers* é usado coletivamente para observações discordantes e para contaminantes. A observação discordante é aquela que aparece surpreendente ou discrepante para o investigador [43]. A observação contaminante apresenta uma diferente distribuição quanto ao resto dos dados. As observações contaminantes podem ou não ser notadas pelo investigador. A Figura 4.2 mostra alguns exemplos de *outliers*.



**Figura 4.2:** Exemplos de *outliers* [43]. Nota: Outliers são indicados em vermelho.

As possíveis fontes de *outliers* são: gravação, erros de medição, suposição da distribuição incorreta dos dados, estrutura de dados desconhecida [43]. Gravação e erros de medição são geralmente as primeiras fontes suspeitas de *outliers*. Suposição incorreta sobre a distribuição dos dados pode levar a uma indicação de *outliers*. Adicionalmente, estrutura de dados desconhecidas e correlações podem causar aparecimento de *outliers* como mostrado na Figura 4.3.



**Figura 4.3:** Resultados exatos e precisos [43].

#### 4.3.1 Gerenciamento de *Outliers*

Existem dois modos de gerenciar dados *outliers*. No laboratório, um cuidado na gravação de cada experimento é recomendado e todos os dados devem ser gravados com alguma possível explicação ou informação adicional. Na análise dos dados, alguns métodos estatísticos são recomendados.

#### 4.3.2 Rotulamento de *Outliers*

O primeiro passo na análise dos dados é rotular *outliers* suspeitos para observação futura. Três métodos diferentes são normalmente disponíveis para a investigação dos dados: método *z-score*, método *z-score* modificado e método *boxplot* [43]. Estas técnicas são baseadas em métodos de regressão robustos. Todas as observações experimentais são padronizadas e os valores extremos predeterminados sobre um limite padrão são rotulados como *outliers* [43].

### 4.3.3 Acomodamento de *Outliers*

Os *Outliers* podem, às vezes, serem acomodados na análise dos dados. Este processo previne a influência de *outliers* nos parâmetros a serem estimados. Alguns modos de acomodação de *outliers* utilizado são: médias adaptadas, estimadores escalares ou intervalos de confiança. Na utilização de uma média adaptada um percentual fixo dos dados é deixado por último para serem ordenados. O valor médio é calculado para o restante dos dados. Esta adaptação irá desprezar os *outliers* e muitas vezes aumenta a eficiência da estimação da média populacional. Nos estimadores escalares, a divisão entre a metade do desvio absoluto e a metade da amostra é usada para calcular uma medida da variabilidade na amostra. Esta variabilidade é resistente aos *outliers* e pode ser usada no lugar do desvio padrão, como é feito no teste *z-score* modificado.

O intervalo de confiança pode ser ajustado usando-se a variância para minimizar o efeito dos *outliers*. Este tipo de variância utiliza a média adaptada no lugar da média populacional.

### 4.3.4 Detecção de *Outliers*

Existem muitos testes para identificação de *outliers*. Os quatros testes outliers comuns para distribuição normal são: o teste de *Rosner*, o teste de *Dixon*, o teste *Grubbs* e o teste de *Cochran*. Estas técnicas são baseadas nos testes de hipóteses, especialmente os métodos de regressão.

#### 4.3.4.1 Teste de *Rosner*

O teste de *Rosner* para detecção de até  $K$  *outliers* pode ser usado quando o número de pontos é maior que 25. Este teste identifica tanto altos *outliers* como baixos *outliers*, ou seja, identifica *outliers* sempre nas duas extremidades [44]. Os dados são arrumados na ordem ascendente e a média e o desvio padrão  $s$  são determinados. O procedimento exige remoção do grupo de dados em observação,  $x$ , isto é, o mais distante, da média.  $R$  é calculado conforme a equação a seguir:

$$R_{i+1} = \frac{|x^{(i)} - \bar{x}^{(i)}|}{s^{(i)}} \quad (4.1)$$

O resultado do teste  $R$  é então comparado com um valor crítico [43]. A hipótese nula determina qual o dado se ajusta a uma distribuição normal para ser então testado. Se  $R$  é menor que o valor crítico, a hipótese nula não pode ser rejeitada e, portanto, não existem *outliers*. Se  $R$  é maior que o valor crítico, a hipótese nula não pode ser rejeitada, e a presença de  $K$  *outliers* é aceita.

#### 4.3.4.2 Teste de *Dixon*

Este teste tem por objetivo identificar valores afastados da amostra. Tem a vantagem que não ser necessário o conhecimento da estimativa do desvio padrão [44]. Para operacionalizar a realização do teste, seguem-se os passos:

1 - Ordenar os valores em ordem crescente, isto é:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

2 – Considerar a hipótese de que o menor valor  $x_1$ , ou o maior valor  $x_n$ , seja um suspeito como um valor *outlier*.

3 - Selecionar o risco desejado de falsa rejeição.

4 – Aplicar as seguintes equações, de acordo com o tamanho da amostra como mostrado na tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Teste de *Dixon*.

$n$	Se $x_n$ é suspeito	Se $x_1$ é suspeito
$3 \leq n \leq 7$	$(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1)$	$(x_2 - x_1) / (x_n - x_1)$
$8 \leq n \leq 10$	$(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_2)$	$(x_n - x_1) / (x_{n-1} - x_1)$
$11 \leq n \leq 13$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_2)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-1} - x_1)$
$14 \leq n \leq 25$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_3)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-2} - x_1)$

5 - Comparar as razões calculadas com os valores críticos – Teste de *Dixon* (ver anexo B). Caso o valor encontrado seja maior, então a suposição de *Outliers* existe.

#### 4.3.4.3 Teste de *Grubbs*

Este teste também é utilizado para se tomar decisões sobre valores *outliers*. Para a execução do teste, segue-se o procedimento:

1 – Ordenam-se os valores em ordem crescente, isto é:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

2 – Considera-se a hipótese de que o menor valor  $x_1$ , ou se o maior valor  $x_n$ , seja suspeito como um valor *outlier*.

3 – Estimar-se (calcula-se) o desvio padrão de todos os valores.

4 – Calcula-se  $T$  conforme a equação (4.2):

$$T = \frac{\bar{x} - x_1}{s} \quad (4.2)$$

onde  $T$  é a variável resultante de *Grubbs*.

5 – Seleciona-se o risco desejado de falsa rejeição.

6 – Comparam-se os valores calculados com os valores tabelados. Se  $T$  for maior que o valor tabelado, a rejeição pode ser feita com o risco associado.

#### 4.3.4.4 Teste de *Cochran*

O teste descrito por Cochran pode ser usado quando se deseja decidir se uma estimativa de variância é excessivamente grande ou não, em comparação com um grupo. Por exemplo, se a variância reportada por um observador é excessivamente grande em comparação com os outros membros do grupo, então se deve proceder ao teste de *Cochran*:

- 1 – Calculam-se as variâncias que serão comparadas;
- 2 – Somam-se todas as variâncias;
- 3 - Calcula-se a razão entre a variância suspeita e o somatório de todas as variâncias.

Se o valor calculado da razão for maior que o da tabela, a variância em questão é considerada como sendo não homogênea.

### **4.4 Avaliação da Incerteza na Medição (Intervalos de Confiança)**

Cada vez que certa quantidade  $X$  é medida, erros estarão presentes. Desde que não seja possível evitar completamente tais erros, faz-se necessário quantificá-los através da incerteza associada na medição.

A incerteza na medição é avaliada de acordo com um dos dois tipos de métodos de avaliação: método tipo A ou tipo B. A avaliação do tipo A da incerteza padrão é feita pela análise estatística de uma série de observações. Neste caso, a incerteza padrão é o desvio padrão experimental da média, que sugere um procedimento ou análise de regressão apropriada. A avaliação da incerteza padrão do tipo B é realizada por uma série de observações.

A avaliação da incerteza padrão tipo A pode ser aplicada quando muitas observações independentes foram feitas por uma quantidade de medições sob as mesmas condições. Se existe resolução suficiente no processo de medição então será observado um espalhamento ou dispersão nos valores obtidos [46]. Então, a avaliação do tipo A somente quantificará o efeito dos erros aleatórios na medição.



Basicamente, dois critérios são usados para análise dos dados com respeito à distribuição de probabilidade: a tendência central e o nível de dispersão dos dados sobre a tendência central [46].

A tendência central de um conjunto de dados, em geral, é dada pelo valor médio de  $n$  observações estatisticamente independentes ( $n > 1$ ), chamada de média aritmética ou termo médio,  $\bar{x}$ . A média é calculada pela seguinte equação:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.3)$$

Um parâmetro estatístico muito utilizado para quantificar o nível de dispersão dos valores  $x_i$  é o desvio padrão experimental  $s(x)$ , expresso pela seguinte equação:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (4.4)$$

o qual é derivado de outro parâmetro estatístico chamado variância experimental,  $s(x)^2$ .

Qualquer medição de um conjunto de dados é dita ser uma amostra de um número teoricamente infinito de medição. Tal conjunto de todos os valores possíveis de medição é comumente chamado de população. Se não existem erros sistemáticos, o valor médio de tal população,  $\mu$ , é o valor verdadeiro da quantidade de interesse. A média amostral  $\bar{x}$  fornece uma estimativa de  $\mu$ . A população também pode ser associada ao desvio padrão  $\sigma$ . Da mesma maneira, o desvio padrão experimental,  $s(x)$ , fornece uma estimativa do  $\sigma$ .

Visto que as medições individuais estão dispersas em volta do valor verdadeiro da quantidade de interesse e, com certa abrangência, dependem da precisão da medição, não é razoável que a média amostral seja exatamente igual à média populacional. Desta forma, as médias aritméticas derivadas de um grupo de dados distintos apresentarão uma variação dentro dos seus respectivos valores. Em outras palavras, a média amostral também é uma quantidade aleatória. O desvio padrão da média amostral é chamado de erro padrão da média (*standard error of the mean – s.e.m*). A relação matemática entre o desvio padrão populacional  $\sigma$  e o *s.e.m* é dada pela seguinte equação [45]:

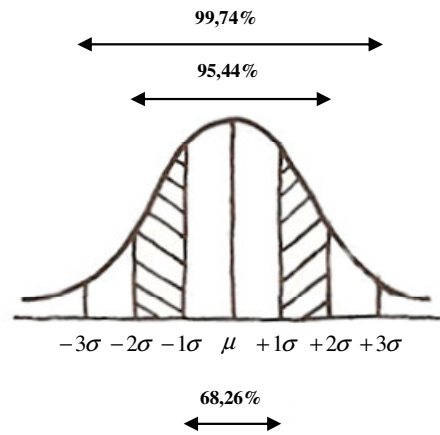
$$s.e.m = \sigma / \sqrt{n} \quad (4.5)$$

Por causa disso, é útil calcular um intervalo numérico para o qual, com certa probabilidade, o valor da quantidade de interesse seja verdadeiro. Este intervalo é chamado de intervalo de confiança.

Assumindo que a quantidade de interesse é descrita por uma distribuição normal com valor esperado  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  – como mostrado na Figura 4.4, 95% da média amostral estarão situadas no intervalo expresso na Equação (4.6):

$$\mu - 1,96 \left( \sigma / \sqrt{n} \right) < \bar{x} < \mu + 1,96 \left( \sigma / \sqrt{n} \right) \quad (4.6)$$

onde o valor 1,96 é o valor da quantidade normalizada da distribuição normal, correspondente à probabilidade selecionada de 95%.



**Figura 4.4:** Área da distribuição normal abrangida pelos valores do desvio padrão.

Na prática,  $\mu$  e  $\sigma$  são parâmetros desconhecidos e somente o valor médio  $\bar{x}$  e o desvio padrão experimental  $s(x)$  são fornecidos a priori, que são estimados para uma medição de amostra finita. Assim, a Equação (4.6) pode ser re-escrita conforme a seguinte equação:

$$\bar{x} - 1,96 \left( s(x) / \sqrt{n} \right) < \mu < \bar{x} + 1,96 \left( s(x) / \sqrt{n} \right) \quad (4.7)$$

Para grandes quantidades de amostras,  $s(x)$  fornece uma estimação suficientemente precisa de  $\sigma$ , que pode ser substituído facilmente nas equações. Mas, para quantidade de amostras não muito grande,  $s(x)$  não fornece uma boa estimativa de  $\sigma$ . Considerando este fato, a equação (4.7) pode ser adaptada para (4.8)

$$\bar{x} - t_{(n-1), (1-\alpha/2)} \left( \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \right) < \mu < \bar{x} + t_{(n-1), (1-\alpha/2)} \left( \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \right) \quad (4.8)$$

onde  $t$  é o valor da distribuição  $t$  Student's para  $(n-1)$  graus de liberdade e probabilidade  $(1-\alpha/2)$ . O termo  $t_{(n-1), (1-\alpha/2)} \left( \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \right)$  é chamado de largura média  $h$ , e  $\alpha$  é o erro permitido, considerando que a quantidade do valor verdadeiro está contida no intervalo calculado.

Como podem ser visto, três variáveis influenciam na largura do intervalo de confiança [47]:

- O número  $n$  de medições;
- A probabilidade de confiança  $(1 - \alpha)$ , predefinida pelo observador;
- A variância  $(s(x)^2)$  relacionada ao valor medido.

A variação relacionada ao valor de medição é dependente de um grupo de fatores imprevisíveis e incontroláveis. Então, o observador está limitado em tratar as alterações de apenas um número de medições e na probabilidade de confiança desejada. Então, as três situações que definem as relações entre o número de medições e as probabilidades de confiança são [47]:

- Se a probabilidade de confiança é constante, um grande número de medições resultará em um intervalo de confiança fechado;
- Se a largura do intervalo de confiança é constante, um grande número de medições resultará em uma grande probabilidade de confiança;
- Se o número de medições é constante, uma grande probabilidade de confiança resultará em intervalo de confiança extenso.

#### 4.4.1 Tipos de Incerteza

Como descrito anteriormente, a incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados das séries de medições e podem ser caracterizados pelo desvio padrão experimental. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvio padrão, são avaliados por meio de distribuição de probabilidade baseadas na experiência ou em outras informações.

Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurando e que os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

Quando um conjunto de muitas medições repetidas é feito, a incerteza padrão,  $u$ , pode ser identificada como o desvio padrão experimental que é uma estimativa não-tendenciosa (*unbiased*) para o desvio padrão [48].

No caso mais simples, a medição é repetida  $n$  vezes exatamente nas mesmas condições obtendo-se resultados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . A melhor estimativa não-tendenciosa para a incerteza padrão é:

$$u = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad (4.9)$$

Neste caso, o número de graus de liberdade é  $\nu = (n-1)$ .

Existem ainda duas maneiras de se calcular a incerteza de uma medição. São elas:

1 – Incerteza Padrão Combinada ( $u_c$ ) é obtida como sendo a raiz quadrada positiva da soma quadrática das diversas incertezas padrão ( $u_i$ ) não correlacionadas e envolvidas no processo de medição [48]

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} \quad (4.10)$$

2 – Incerteza Expandida ( $u_p$ ), obtida pela multiplicação do fator de abrangência ( $k$ ) pela incerteza padrão combinada [48].

$$u_p = k.u_c \quad (4.11)$$

O fator de abrangência é um fator numérico usado como multiplicador da incerteza padrão combinada, de modo a obter a incerteza expandida.

A distribuição de probabilidade da incerteza expandida é aproximadamente normal. O menor valor do fator de abrangência ( $k$ ) é:

- $k = 2$  - para nível de confiança de aproximadamente 95%.
- $k = 3$  - para nível de confiança de aproximadamente 99%.

## 4.5 Tratamento Estatístico das Medições em DSL

A maioria das medições utilizadas neste trabalho, por mais otimizadas que sejam sua capacidade de desempenho, não está isenta de provocar erros quando de sua utilização. Portanto, se fez necessário um tratamento estatístico dos valores dos parâmetros físicos do enlace do assinante medidos, com a intenção de se identificar os erros de natureza sistemáticas e/ou aleatórios cometidos nos processos de medição.

Neste sentido, adotaram-se alguns procedimentos para realização do tratamento estatístico. Esses procedimentos são descritos nas seções seguintes.

### 4.5.1 Aplicação do Teste de *Dixon*

Como descrito na seção 4.3.4, existem alguns testes que auxiliam a análise para detectar amostras (valores) que divergem em uma população. Porém, nesse trabalho utilizou-se o teste de *Dixon*, devido este apresentar uma boa precisão e rapidez na detecção de valores *outliers*. A escolha desse teste foi devido à sua facilidade e por se tratar de um método simples e eficaz. Além disso, o fator determinante na sua escolha é: a possibilidade do teste ser

aplicado em uma quantidade de amostras considerável. Outra vantagem é que não é necessário o conhecimento a priori da estimativa desses valores.

#### 4.5.1.1 Procedimentos para Realização do Teste de *Dixon*

Após a coleta das medições os dados são armazenados em arquivos no formato .xls, sendo que cada arquivo é composto de três colunas que são: frequência, parte real e parte imaginária para toda faixa de frequência utilizada. Para cada valor da parte real e imaginária usa-se o teste de *Dixon*, conforme o código fonte no Anexo B. Depois do processamento é gerado um arquivo de saída, no formato .txt para análise dos resultados. Considerando que o número de *outliers* encontrados esteja abaixo de 15% do total da amostra, estes dados podem ser armazenados para serem utilizados na etapa seguinte. Caso contrário, esses dados são descartados e novas medições são realizadas.

#### 4.5.2 Aplicação da Incerteza nas Medições

Nessa etapa, a incerteza associada nas medições é determinada através da utilização do desvio padrão das  $n$  medições realizadas, conforme o código fonte no Anexo B. Para essa etapa utilizou-se um código fonte, o qual se encontra no Anexo B, que utilizou as equações 4.9 a 4.11, o intervalo de confiança utilizado para a estimativa da incerteza das medições foi de 95,44%, conforme mostrado na Figura 4.4.

## 4.6 Considerações Finais

Foi mostrado neste capítulo a necessidade de se realizar análises estatísticas nos dados das medições em DSL para se determinar a presença de *outliers* (dados incoerentes). Foram descritas algumas técnicas de análise, porém, o teste de *Dixon* foi escolhido como o método a ser utilizado neste trabalho, pois este método apresenta uma boa precisão e rapidez na detecção de valores *outliers*.

Adicionalmente, este capítulo mostrou a importância da análise da incerteza associada às medições no tratamento estatístico dos dados/resultados.

O próximo capítulo apresentará a aplicação da metodologia proposta através de alguns estudos de casos, considerando algumas situações quanto aos procedimentos de medições. Também apresentará uma análise para os resultados obtidos.