

Estudo Teórico de Monopolos de Koch Modificados com Dimensões Reduzidas

Karlo Q. da Costa e V. Dmitriev

UFPA – Universidade Federal do Pará – Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação – DEEC,
Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado – LEA
Av. Augusto Corrêa nº 01 – CP:8619, CEP: 66075-900 Belém/PA, BRASIL

Resumo — Antenas fractais são conhecidas por apresentarem características geométricas especiais que possibilitam reduzir suas dimensões. Neste trabalho, é apresentada uma análise do efeito da variação da dimensão fractal sobre as propriedades radiativas dos monopolos de Koch. As geometrias das antenas foram obtidas por meio de um novo algoritmo *IFS (Iterative Function System)* de geração de curvas fractais. Para estas antenas, são apresentados os resultados numéricos da variação da impedância de entrada, das frequências de ressonância e dos diagramas de radiação em função da dimensão fractal. Utilizou-se o Método dos Momentos para os cálculos.

Palavras-chave — Antenas fractais, redução das dimensões, monopolo de Koch modificado.

I. INTRODUÇÃO

A miniaturização de antenas é uma das principais necessidades para os futuros sistemas de comunicação via rádio [1]. As aplicações de antenas eletricamente pequenas incluem, por exemplo, dispositivos compactos de comunicação e arranjos eficientes de antenas. Existem várias técnicas disponíveis na literatura para a construção de radiadores compactos [2]-[3]. Uma destas é a utilização de geometrias fractais. Diversos tipos de antenas lineares e de microfita fractais podem ser encontradas em [3].

Os monopolos de Koch são antenas lineares que possuem geometrias iguais às curvas de Koch (Fig. 1). Estas antenas são dispostas verticalmente acima de um plano de terra e alimentadas na sua extremidade inferior. A Fig. 1 mostra as primeiras iterações deste fractal. As propriedades radiativas destas antenas são discutidas em [3]-[6]. Um dos principais resultados que estes autores concluíram, é que a redução na frequência de ressonância em função do número de iterações, converge assintoticamente para um limite em torno de 44%.

Uma forma de estender este limite, é aumentando-se a dimensão fractal, ou seja, aumentar o volume efetivo ocupado pela antena. Isto pode ser obtido, por exemplo, alterando o valor do parâmetro α (Fig. 1), que é constante e igual a 60° para a curva de Koch convencional, e mantendo as frações s_1 , s_2 , s_3 e s_4 iguais, como utilizado em [7]. Neste caso, as transformações de afinidade do algoritmo *IFS*, possuem fatores de escala constantes ($s_1=s_2=s_3=s_4$). Isto implica na prática, em termos de modelamento por MoM (Método dos Momentos), que os segmentos de discretização da curva fractal são uniformes, simplificando assim a aplicação deste método numérico.

A proposta do presente trabalho consiste em fazer uma análise do efeito da dimensão fractal sobre as propriedades radiativas dos monopolos de Koch. Um novo algoritmo *IFS* foi utilizado para a geração das geometrias das antenas. Neste algoritmo, as frações s_1 e s_4 foram fixadas iguais a um terço do comprimento L (Fig. 1) e variou-se o parâmetro α , isto implica na variação da dimensão fractal. A descrição detalhada deste fractal será mostrada na próxima seção. Os monopolos de Koch resultantes foram modelados por MoM, onde, por meio deste, foram calculadas as variações da impedância de entrada, das frequências de ressonância e dos diagramas de radiação em função da dimensão fractal. Alguns destes resultados obtidos foram comparados com os resultados de cálculos para o monopolo de Koch padrão e com os resultados experimentais de [6].

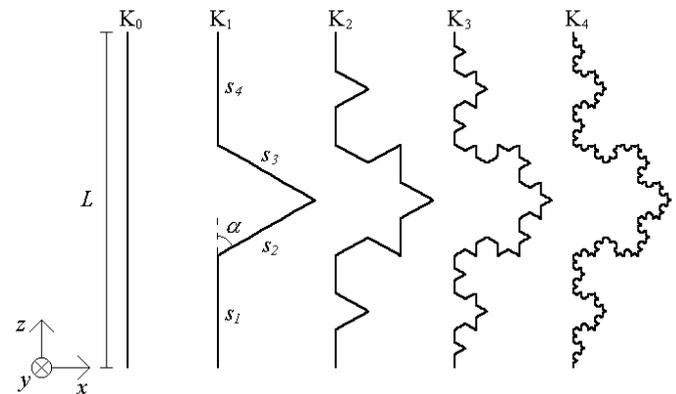


Fig. 1. Curvas correspondentes as 4 primeiras iterações do fractal de Koch. Os monopolos K_0 e K_1 são chamados respectivamente de iniciador e gerador.

II. DESCRIÇÃO DO FRACTAL

Os objetos que não variam sua forma depois da aplicação de uma determinada transformação geométrica são chamados de simétricos. Os tipos de simetrias mais comuns são translação, rotação e reflexão [8]. Os fractais são objetos que possuem um tipo especial de simetria chamada de auto-similaridade. Esta simetria é também conhecida como simetria de dilatação ou, simplesmente, de simetria fractal.

Existe um método de construção de fractal chamado de iniciador-gerador. Neste método, a partir de um determinado iniciador, aplica-se repetidamente um conjunto pré-definido de transformações de afinidade. Na Fig. 1, por exemplo, K_0 é o iniciador e K_1 o gerador. A seguir, é descrito o algoritmo *IFS* de geração do fractal de Koch modificado e apresentado suas propriedades geométricas.

A. Algoritmo IFS

O iniciador K_0 , mostrado na Fig. 1, corresponde ao monopolo reto. Para se construir o gerador, aplica-se um conjunto de quatro transformações de afinidade W_1, W_2, W_3 e W_4 nos pontos que definem o iniciador e depois se unem os pontos resultantes. Esta operação pode ser representada simbolicamente por

$$K_1 = W_1(K_0) \cup W_2(K_0) \cup W_3(K_0) \cup W_4(K_0) = W(K_0), \quad (1)$$

onde \cup significa união. Suponha que K_0 esteja sobre o eixo x do plano xy , com uma de suas extremidades na origem do plano, desta forma as transformações são definidas por

$$W_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L/3 & 0 \\ 0 & L/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$W_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (L/e_1)\cos\alpha & -(L/e_1)\sin\alpha \\ (L/e_1)\sin\alpha & (L/e_1)\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$W_3 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (L/e_1)\cos\alpha & (L/e_1)\sin\alpha \\ -(L/e_1)\sin\alpha & (L/e_1)\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ (L/6)\tan\alpha \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$W_4 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L/3 & 0 \\ 0 & L/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2L/3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde $e_1 = 6\tan\alpha$. As iterações sucessivas podem ser obtidas recursivamente aplicando $K_{n+1} = W(K_n)$, sendo n a n -ésima iteração do fractal. O fractal de Koch convencional é obtido com $\alpha = 60^\circ$. A Fig. 2 mostra as quatro primeiras iterações deste fractal de Koch modificado para $\alpha = 40^\circ$ e $\alpha = 70^\circ$.

B. Dimensão fractal

A dimensão fractal D é um número que caracteriza estruturas fractais. Este parâmetro pode ser interpretado como uma medida da habilidade de ocupação de espaço de uma forma fractal. Existem diversas definições para D , uma delas, a utilizada aqui, é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch ou dimensão de auto-similaridade [8], [3]. Nesta definição, a dimensão, D , é uma solução da seguinte equação

$$k_1 \left(\frac{1}{h_1}\right)^D + k_2 \left(\frac{1}{h_2}\right)^D + \dots + k_m \left(\frac{1}{h_m}\right)^D = 1, \quad (6)$$

onde k_m é o número de cópias do iniciador escalado por h_m . Para o fractal descrito por (1)-(5), tem-se que $m=4$ e $s_1=L/3$, $s_2=L/e_1$, $s_3=L/e_1$ e $s_4=L/3$, portanto $k_1=k_2=k_3=k_4=1$, $h_1=h_4=3$ e $h_2=h_3=e_1$. Substituindo estes valores em (6) tem-se

$$\left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{6\cos\alpha}\right)^D = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

A solução desta equação transcendente, para dados valores de α , fornece o valor de D . Um parâmetro importante no projeto

de antenas lineares é o comprimento total do condutor. Quanto maior o comprimento do condutor da antena, menor a frequência de ressonância. Pode ser demonstrado que este comprimento, para o monopolo de Koch modificado de iteração n , é obtido da seguinte equação

$$l_n = 2^n \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6\cos\alpha} \right]^n L. \quad (7)$$

A Tabela I mostra os valores de l_n e D calculados para as quatro primeiras iterações deste fractal, e com os seguintes valores $\alpha = 10^\circ, 25^\circ, 40^\circ, 55^\circ, 60^\circ$ e 70° e $L=1\text{m}$.

TABELA I VARIACÃO DE l_n E D EM FUNÇÃO DE n E α

α	D	Comprimento l_n (normalizado com $L=1\text{m}$) do fractal em função do número de iterações n e α .			
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
10°	1,0038	1,0051	1,0103	1,0155	1,0207
25°	1,0258	1,0345	1,0701	1,1070	1,1451
40°	1,0766	1,1018	1,2140	1,3376	1,4737
55°	1,1905	1,2478	1,5570	1,9429	2,4244
60°	1,2618	1,3333	1,7778	2,3704	3,1605
70°	1,5739	1,6413	2,6938	4,4212	7,2564

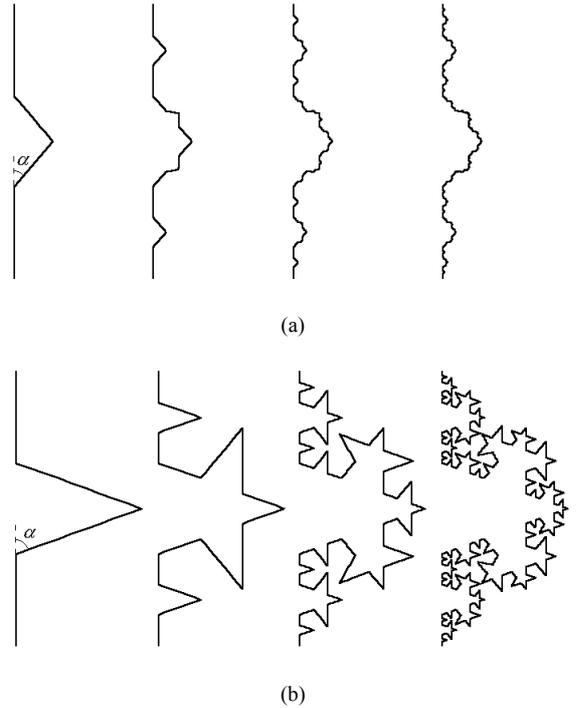


Fig. 2. Exemplos de monopolos de Koch modificados. (a) $\alpha=40^\circ$. (b) $\alpha=70^\circ$.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Utilizando o algoritmo IFS descrito acima e o MoM [9], desenvolveu-se um programa em Matlab 6 para o cálculo das impedâncias de entrada, das frequências de ressonância e dos diagramas de radiação para diversos monopolos de Koch modificados. Foram feitas simulações para $\alpha = 10^\circ, 25^\circ, 40^\circ, 55^\circ, 60^\circ$ e 70° , de monopolos com alturas constantes $L=6\text{cm}$ e diâmetro do condutor $d=1\text{mm}$. Para cada valor de α , foram

analisados os pré-fractais de iterações K_0 , K_1 , K_2 , K_3 e K_4 , sendo que os números de segmentos de discretização utilizados em cada uma destas iterações, respectivamente, foram 31, 36, 80, 192 e 256. Os principais resultados numéricos destas simulações são mostrados a seguir.

A. Freqüência de ressonância e resistência de radiação

A Tabela II compara os resultados da primeira freqüência de ressonância dos monopólos de Koch padrões (Fig. 1) obtidos aqui com aqueles teóricos e experimentais apresentados em [6]. Utilizou-se $L=6\text{cm}$ e $d=1\text{mm}$. Com relação à resistência de radiação da primeira ressonância (R_r) destes monopólos, uma outra comparação é apresentada na Tabela III. A diferença entre os resultados teóricos e experimentais nestas tabelas se deve à diferença entre as seções transversais dos condutores [6].

TABELA II FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

Antena	Freqüência de ressonância fundamental dos monopólos de Koch convencionais (MHz)		
	Obtido aqui	Obtido por [6]	Experimental [6]
K_0	1224	1201	1170
K_1	969,7	981,5	981
K_2	826,7	835,2	869
K_3	737,9	745,3	818
K_4	673,3	691,1	-

TABELA III RESISTÊNCIA DE RADIAÇÃO

Antena	Resistência de radiação da primeira freqüência de ressonância dos monopólos de Koch convencionais (Ohms)		
	Obtido aqui	Obtido por [6]	Experimental [6]
K_0	36	35,8	35
K_1	23,3	23,2	25,1
K_2	17,2	17,1	17,8
K_3	13,9	13,7	17
K_4	11,7	11,6	-

A variação do comprimento normalizado L/λ (λ é o comprimento de onda) em função de α e do número de iterações n , da 1ª e 2ª ressonância, respectivamente são mostradas nas Fig. 3 e Fig. 4. A Fig. 5 apresenta as curvas de R_r em função de n e α .

Estes resultados obtidos mostram que quando aumenta-se o ângulo α , ou, equivalentemente, a dimensão D (Tabela I), as

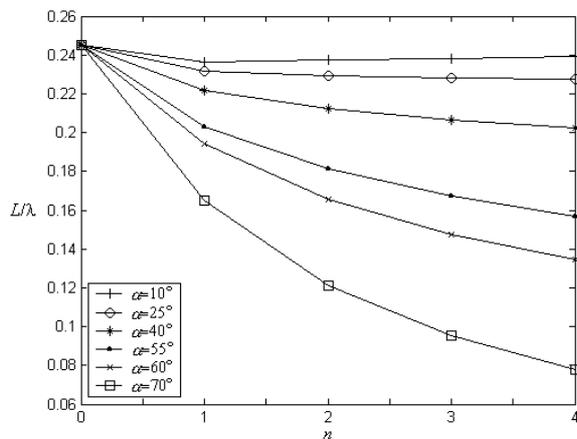


Fig. 3. Variação do comprimento normalizado L/λ em função de α e n da primeira ressonância dos monopólos de Koch.

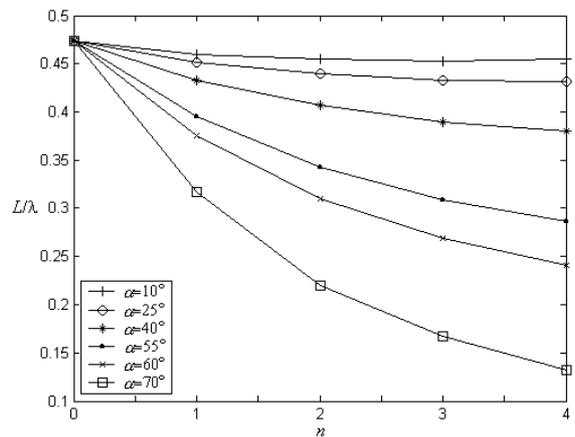


Fig. 4. Variação do comprimento normalizado L/λ em função de α e n da segunda ressonância dos monopólos de Koch.

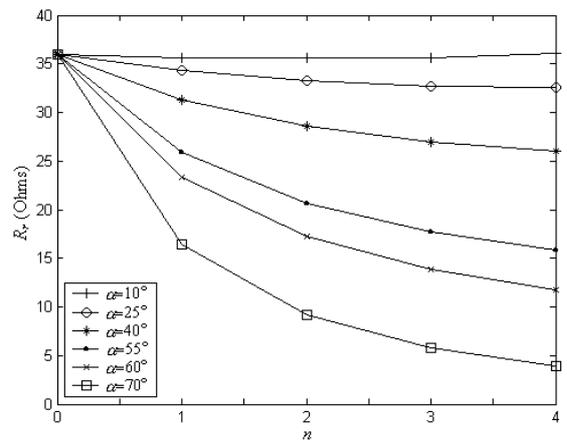


Fig. 5. Variação da resistência de radiação R_r em função de α e n .

freqüências de ressonância tornam-se menores. Também se observa que cada curva da Fig. 3 tende assintoticamente para um determinado limite. Para a curva com $\alpha=70^\circ$, obteve-se uma redução na freqüência, em relação ao monopolo reto de mesma altura, de aproximadamente 68% para o K_4 (Fig.2(b)). Com relação ao valor de R_r , este se torna cada vez menor com o aumento de n e α , assumindo o valor mais baixo, aproximadamente 4Ω , para o monopolo $\alpha=70^\circ$ e K_4 (Fig. 5).

B. Impedância de entrada

As impedâncias de entrada, para as quatro primeiras iterações, dos monopólos de Koch com $\alpha=40^\circ$, $\alpha=60^\circ$ e $\alpha=70^\circ$, são mostradas, respectivamente, nas Fig. 6, Fig. 7 e Fig. 8.

Dos resultados apresentados nestas figuras, nota-se que a impedância de entrada ($Z_{in}=R_{in}+jX_{in}$) dos monopólos com $\alpha=40^\circ$ (Fig. 6), possuem pouca variação com relação àquela do monopolo K_0 . Isto se deve a geometria desta antena que é a que mais se parece com a do monopolo K_0 . Já com relação aos monopólos com $\alpha=70^\circ$, os valores de Z_{in} são bastantes diferentes daqueles do monopolo K_0 (Fig. 8). As impedâncias de entrada dos monopólos de Koch convencionais (Fig. 7), possuem comportamento médio entre os de $\alpha=40^\circ$ e $\alpha=70^\circ$.

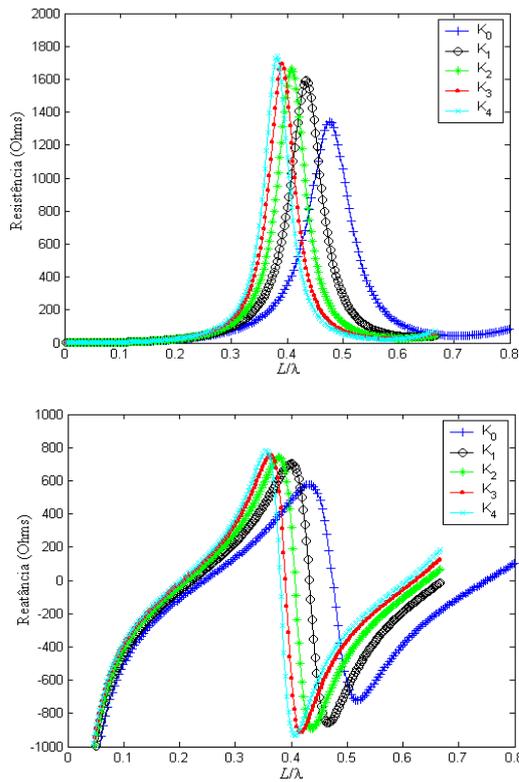


Fig. 6. Impedância de entrada dos monopolos de Koch para $\alpha=40^\circ$.

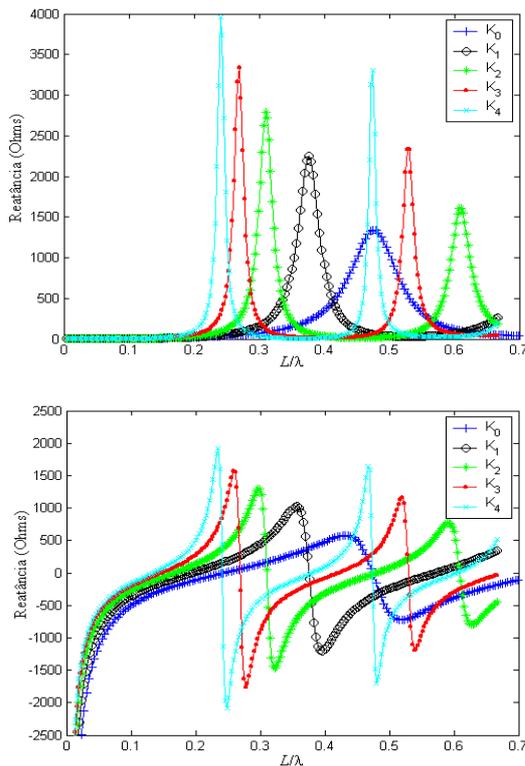


Fig. 7. Impedância de entrada dos monopolos de Koch para $\alpha=60^\circ$.

Observa-se também destas curvas, que as variações de R_{in} e X_{in} se tornam cada vez mais intensas quando se aumentam n ou α . Isto significa que as larguras de banda são menores

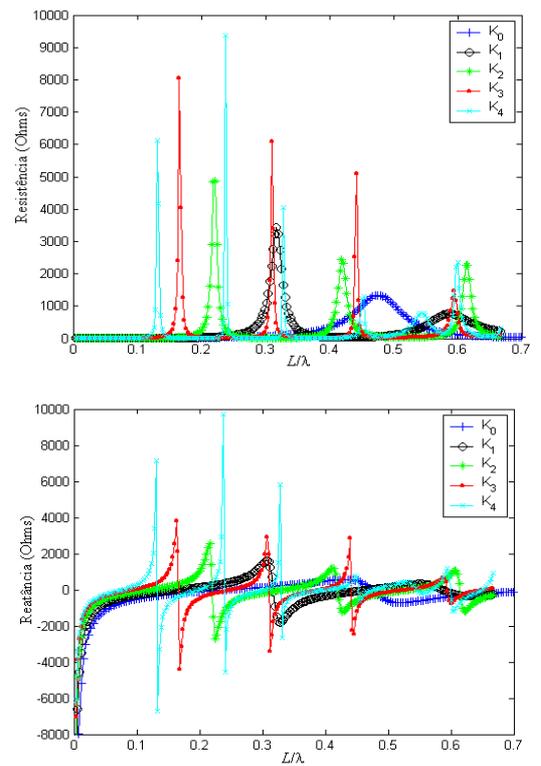


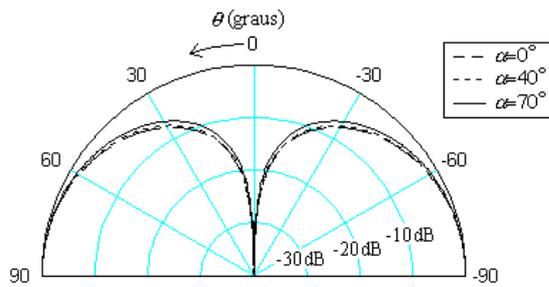
Fig. 8. Impedância de entrada dos monopolos de Koch para $\alpha=70^\circ$.

para aquelas antenas que possuem menores frequências de ressonância, ou seja, as que possuem menores dimensões quando todas operam na mesma ressonância. Este comportamento é o mesmo daquele de antenas eletricamente pequenas não ressonantes [10].

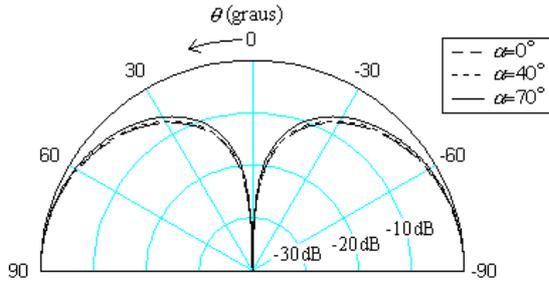
C. Diagramas de radiação

Nas Fig. 9 e Fig. 10, são apresentados os diagramas de radiação das antenas $\alpha=0^\circ$ (K_0), $\alpha=40^\circ$ (K_3) e $\alpha=70^\circ$ (K_3), nos planos xz com $\phi=0^\circ$ e yz com $\phi=90^\circ$ (Fig. 1), sendo θ e ϕ as coordenadas esféricas. A Fig. 9 mostra os diagramas calculados na primeira ressonância de cada antena, e a Fig.10 os diagramas na segunda ressonância. Os comprimentos normalizados (L/λ) das antenas $\alpha=0^\circ$ (K_0), $\alpha=40^\circ$ (K_3) e $\alpha=70^\circ$ (K_3) na primeira ressonância são, respectivamente, 0,2457; 0,2067 e 0,0952, para a segunda ressonância estes valores, respectivamente, são 0,4742; 0,3898 e 0,1667. Estes valores podem ser obtidos das Fig. 3 e Fig. 4.

A partir dos resultados mostrados nestas figuras, observa-se que, na primeira ressonância (Fig. 9), os diagramas de radiação dos monopolos de Koch com $\alpha=40^\circ$ (K_3) e $\alpha=70^\circ$ (K_3) são muito parecidos com os do monopolo K_0 . Esta semelhança também foi observada com as outras iterações K_1 , K_2 e K_4 . Já para os diagramas na segunda ressonância (Fig. 10), a antena $\alpha=70^\circ$ (K_3) possui maiores intensidades de radiação próximo ao eixo z , do que as antenas $\alpha=40^\circ$ (K_3) e K_0 . Isto é devido à sua geometria (Fig. 2(b)), que possui mais seções de condutores orientados próximo da direção horizontal. Estes segmentos são os que mais contribuem para a radiação na direção vertical.

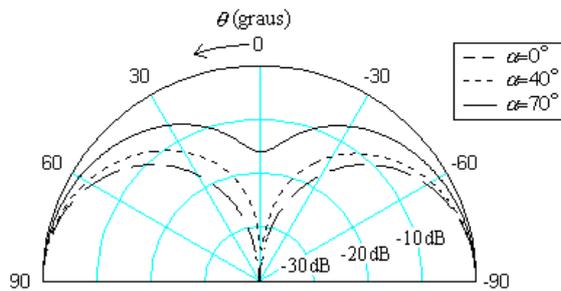


(a)

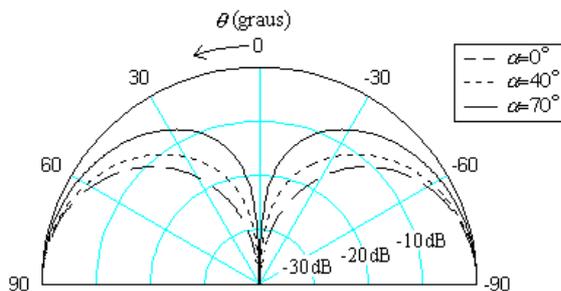


(b)

Fig. 9. Diagramas de radiação dos monopólos com $\alpha=0^\circ$ (convencional), $\alpha=40^\circ$ e $\alpha=70^\circ$, sendo os dois últimos em $n=3$ (K_3). A frequência de cada monopólo é a primeira ressonância. (a) plano xz ($\phi=0^\circ$). (b) plano yz ($\phi=90^\circ$).



(a)



(b)

Fig. 10. Diagramas de radiação dos monopólos com $\alpha=0^\circ$ (convencional), $\alpha=40^\circ$ e $\alpha=70^\circ$, sendo os dois últimos em $n=3$ (K_3). A frequência de cada monopólo é a segunda ressonância. (a) plano xz ($\phi=0^\circ$). (b) plano yz ($\phi=90^\circ$).

Os diagramas de radiação no plano yz ($\phi=90^\circ$) de todos os monopólos, em qualquer frequência de operação, possuem um valor nulo na direção z , isto se deve ao fato do plano dos

monopólos fractais ser o xz , produzindo assim componente do campo elétrico distante para $\theta=0^\circ$ somente neste plano, ou seja, $E_x=E_\theta(\phi=0^\circ, \theta=0^\circ) \neq 0$ e $E_y=E_\theta(\phi=90^\circ, \theta=0^\circ)=0$.

Para todas as antenas analisadas, foi observado um comportamento de radiação praticamente isotrópico no plano xy (horizontal), e também um nível de polarização cruzada (valor da componente do campo elétrico E_ϕ) muito baixo. Portanto, a polarização dos monopólos de Koch pode ser considerada vertical.

IV. CONCLUSÕES

A análise do efeito da variação da dimensão fractal sobre as propriedades radiativas dos monopólos de Koch foi apresentada neste trabalho. Para a construção destas antenas com diferentes dimensões fractais, desenvolveu-se um novo algoritmo *IFS* de geração de curvas fractais. Verificou-se que quanto maior a dimensão fractal, o que significa maiores valores do parâmetro α utilizado na descrição do fractal, menores frequências de ressonância são verificadas. Por exemplo, para a quarta iteração do monopólo com $\alpha=70^\circ$, foi obtido uma redução de 68% da primeira ressonância com relação a primeira do monopólo reto. Vale ressaltar que esta redução para o monopólo de Koch padrão ($\alpha=60^\circ$), na mesma iteração, é de aproximadamente 44%.

Dos resultados apresentados das impedâncias de entrada, observamos que os monopólos com maior dimensão fractal tiveram menor largura de faixa e menores valores para a resistência de radiação de primeira ressonância (Fig. 5). E finalmente verificou-se que os diagramas de radiação destas novas antenas, na primeira frequência de ressonância, não sofrem variação significativa com relação aos dos monopólos reto e de Koch convencional. Apenas uma pequena alteração destes ocorreu na segunda frequência de ressonância (Fig.10).

REFERÊNCIAS

- [1] H. Morishita, Y. Kim, K. Fujimoto, "Design concept of antennas for small mobile terminals and the future perspective", *IEEE Ant. Propag. Mag.*, vol. 44, N5, pp. 30-43, October 2002.
- [2] T. J. Warnargiris, T. J. Minardo, "Performance of the meandered line as an electrically small transmitting antenna", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 46, N12, pp. 1797-1801, December 1998.
- [3] J. P. Gianvittorio, Yahya R.-S., "Fractal antennas: a novel antenna miniaturization technique, and applications", *IEEE Ant. Propag. Mag.*, vol. 5, N1, pp. 20-35, February 2002.
- [4] C. P. Baliarda, J. Romeu, A. Cardama, "The Koch monopole: a small fractal antenna", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 48, N11, pp. 1773-1781, November 2000.
- [5] S. R. Best, "On the performance properties of the Koch fractal and other bent wire monopoles", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 51, N6, pp. 1292-1300, June 2003.
- [6] S. R. Best, "On the resonant properties of the Koch fractal and other bent wire monopoles", *IEEE Ant. Wir. Propag. Let.*, vol. 1, pp. 74-76, 2002.
- [7] K. J. Vinoy, J. K. Abraham, V. K. Varadan, "On the relationship between fractal dimension and the performance of multi-resonant dipole antennas using Koch curves", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 51, N9, pp. 2296-2303, September 2003.
- [8] *Electromagnetic Symmetry*, C. E. Baum, H. N. Kritikos, eds, Washington: Taylor & Francis, 1892, pp. 231-244.
- [9] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, New York: Macmillan, 1968, pp. 62-81.
- [10] W. Geyi, "Physical limitations of antenna", *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 51, N8, pp. 2116-2123, August 2003.