

Análise de Transientes Eletromagnéticos em Sistemas de Aterramento Utilizando o Método dos Momentos (MoM)

Karlo Q. da Costa e Victor A. Dmitriev

Resumo—Este trabalho apresenta um modelo matemático baseado na teoria de campos eletromagnéticos para análise de transientes em sistemas de aterramento elétrico. Este modelo consiste na utilização do Método dos Momentos (MoM) na solução numérica da equação integral dos potenciais eletromagnéticos derivada de um sistema de aterramento composto por hastes. A aproximação da teoria da imagem modificada é utilizada para considerar o efeito da interface entre o ar e o solo. Exemplos de cálculos obtidos por este modelo são apresentados e comparados com resultados teóricos e experimentais existentes na literatura.

Palavras-Chave—Sistemas de aterramento, Método dos Momentos, teoria eletromagnética, transiente eletromagnético.

Abstract—This work presents a mathematical model based on electric field theory to analyze transients in electric grounding systems. This model uses the Method of Moments (MoM) to solve numerically the equation of the electromagnetics potentials derived from a grounding system compound by rods. The modified theory of the image is used to consider the interface air-earth. Numerical results obtained by this model are presented and compared with experimental and theoretical data existet in literature.

Index Terms—Grounding systems, Method of Moments, electromagnetic theory, electromagnetic transient.

I. INTRODUÇÃO

Um sistema de aterramento elétrico tem como um dos principais objetivos proteger um determinado sistema elétrico contra sobre-correntes e sobre-tensões as quais podem ser causadas por curtos circuitos, por acúmulo de cargas ou por descargas atmosféricas [1]. Um bom sistema de aterramento é aquele que facilita o fluxo de corrente para a terra, ou seja, que possui baixa resistência de terra.

A análise de sistemas de aterramento pode ser classificada em dois tipos: análise em baixas e em altas frequências. Em frequências baixas, um sistema pode ser representado por

uma simples resistência equivalente (Figura 1(a)). Exemplos de resistências equivalentes para baixas frequências de alguns sistemas de aterramento convencionais podem ser encontrados em [1]. Em altas frequências, um sistema de aterramento pode ser representado aproximadamente por uma carga reativa (Figura 1(b)). Em [2] é apresentado um modelo de circuito equivalente de uma haste vertical para análise de transientes eletromagnéticos.

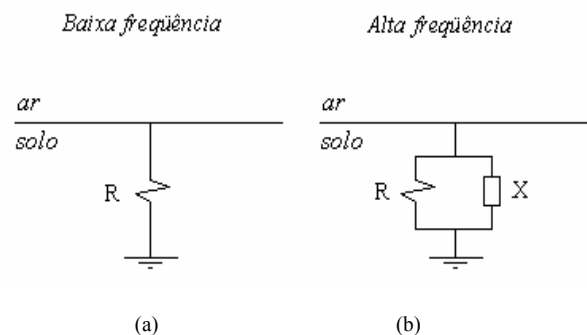


Fig. 1. Modelos de circuitos equivalentes simples de um determinado sistema de aterramento. (a) baixas frequências. (b) altas frequências.

Estes circuitos equivalentes para análise de aterramentos sujeitos há correntes impulsivas (altas frequências) possuem as seguintes desvantagens: apresentam resultados com baixa precisão e existem modelos de circuitos apenas para alguns casos simples, por exemplo, hastes verticais, horizontais, etc.

Existem modelos mais elaborados para análise de transientes em sistemas de aterramento mais complexos, como por exemplo o de circuitos equivalente mais geral utilizado em [3], e o de linhas de transmissão no domínio do tempo [4]. Estes modelos também apresentam algumas aproximações pois neles são usados parâmetros equivalentes (condutância equivalente, capacitância equivalente, etc)

Os modelos teóricos existentes na literatura mais precisos são aqueles conhecidos como modelos eletromagnéticos, visto que estes utilizam diretamente as equações de Maxwell em seu desenvolvimento [5]-[9]. Dentre estes, existem aqueles que utilizam funções de Green exatas em vez da aproximação da teoria da imagem modificada [8].

Neste trabalho é apresentado um modelo teórico eletromagnético para análise de transientes em sistemas de aterramento. Este modelo utiliza o MoM para resolver a

Karlo Queiroz da Costa e Victor Dmitriev, Departamento de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém, Pará, Brasil, E-mails: karlocosta@yahoo.com.br, victor@ufpa.br. Este trabalho foi financiado pela Eletronorte e UFPA através do projeto sobre aterramento elétrico.

equação integral dos potenciais derivado de um sistema de aterramento composto por hastes. Neste modelo utilizamos funções base senoidais e funções teste pulso retangular. Para considerar o efeito da interface entre o ar e o solo, aplicamos a teoria da imagem modificada [9]-[10]. Este trabalho é organizado da seguinte forma. A Seção II contém o desenvolvimento do modelo teórico. A Seção III mostra um exemplo de aplicação deste método, onde os resultados obtidos são comparados com dados teóricos e experimentais existentes na literatura. E a Seção IV apresenta as conclusões e alguns comentários com relação a precisão deste modelo.

II. DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

O desenvolvimento teórico apresentado a seguir considera a análise apenas de hastes condutoras sem perdas e que estão presentes abaixo da superfície da terra. Considera-se também que a corrente nos condutores flui somente na direção radial e que esta corrente situa-se no eixo dos condutores e não em sua superfície.

A. Descrição do problema

O problema de análise de transientes em um determinado sistema de aterramento consiste em determinar os potenciais nos condutores do sistema e potenciais próximo destes quando uma determinada corrente impulsiva é injetada em algum ponto do sistema. Distribuições de campos e potenciais nos condutores, próximos aos condutores e na superfície da terra também podem ser calculados na análise.

Como a fonte de corrente impulsiva é no domínio do tempo e o MoM que será utilizado a seguir é formulado no domínio da frequência, a fonte de corrente $i(t)$ é transformada para o domínio da frequência por meio da transformada discreta de Fourier (FFT). Os resultados de voltagem obtidos por este método são no domínio da frequência. Para obtermos os resultados no domínio do tempo aplicamos a transformada discreta inversa de Fourier (IFFT). Estas rotinas de transformada já existem no *software* Matlab 6 [11] o qual utilizamos para desenvolver o programa computacional.

B. Equação Integral dos Potenciais (EIP)

Dado um condutor linear em um meio homogêneo, considere que exista um campo elétrico \vec{E}^i incidindo neste. Este campo irá produzir correntes elétricas no fio que por sua vez irão radiar um campo espalhado \vec{E}^e . Para um fio condutor perfeito, temos a seguinte condição de contorno na superfície do fio $\vec{n} \times \vec{E}^e = -\vec{n} \times \vec{E}^i$. As equações de Maxwell nos fornecem a seguinte equação para o cálculo do campo espalhado.

$$\vec{E}^e = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi, \quad (1)$$

sendo que

$$\vec{A} = \mu \int_l \vec{I}g(R)dl, \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int_l \chi(l)g(R)dl, \quad (3)$$

$$\chi(l) = -\frac{1}{j\omega} \frac{dI}{dl}, \quad (4)$$

$$g(r) = \frac{e^{-\gamma|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (5)$$

onde $|\vec{r}-\vec{r}'|$ é a distância entre um ponto sobre o condutor l (\vec{r}') e um ponto de observação (\vec{r}), e

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\epsilon, \quad (6)$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 + \frac{\sigma}{j\omega}, \quad (7)$$

sendo μ a permeabilidade magnética do meio, ϵ_r e ϵ_0 são respectivamente a permissividade relativa do meio e a permissividade do espaço livre, σ a condutividade do meio e ω a frequência angular. Utilizamos o fator $e^{j\omega t}$ para as grandezas no domínio da frequência.

Substituindo (2)-(5) em (1) obtemos a equação integral dos potenciais de um fio condutor em um meio homogêneo conduzindo uma corrente I . A equação resultante é uma equação integral pois a grandeza que queremos calcular I está no integrando.

C. Solução numérica por MoM

Para resolver numericamente a equação integral descrita na seção anterior pelo MoM, temos primeiro que dividir o condutor linear em vários segmentos retos e aproximar a distribuição de corrente em cada segmento destes por um determinado tipo de função base.

A Figura 2 abaixo mostra um condutor linear de comprimento L dividido em N segmentos retos. Dois segmentos genéricos n e m são mostrados sendo que o vetor comprimento destes são $\overline{\Delta l}_n$ e $\overline{\Delta l}_m$ respectivamente. O vetor unitário na direção tangencial a cada segmento de discretização do condutor é \overline{a}_n , onde $\overline{\Delta l}_n = \Delta l_n \overline{a}_n$.

A corrente total no condutor é aproximada por

$$\vec{I} = \sum_{n=1}^N \overline{I}_n, \quad (8)$$

onde

$$I_n = \frac{1}{\sinh \gamma \Delta l_n} [I_{n1} \sinh \gamma(l_{n2} - l) + I_{n2} \sinh \gamma(l - l_{n1})], \quad (9)$$

$$\overline{I}_n = I_n \overline{a}_n.$$

Funções base senoidal foram escolhidas porque os segmentos condutores retos que possuem esta distribuição de corrente possuem expressões exatas para os campos eletromagnéticos

radiados, conforme será mostrado na próxima seção.

A Figura 3 mostra um exemplo de um condutor dividido em cinco segmentos e suas respectivas funções base. Observe que neste exemplo a corrente é nula nas extremidades, este caso é típico de problemas de antenas e espalhamento. Os parâmetros I_{n1} e I_{n2} são as constantes de expansão de \bar{I} , e estes são os valores das correntes nas extremidades de cada segmento (Figura 4). A seguir é apresentado o procedimento para o cálculo destas constantes.

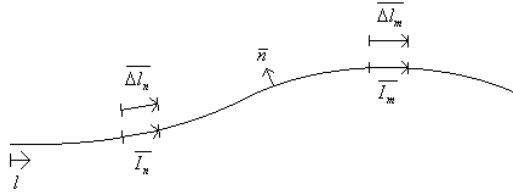


Fig. 2. Dois segmentos genéricos de um condutor de comprimento L .

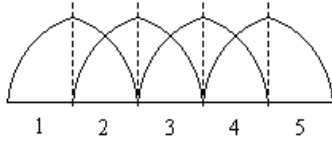


Fig. 3. Exemplo de expansão senoidal em um condutor de cinco segmentos.

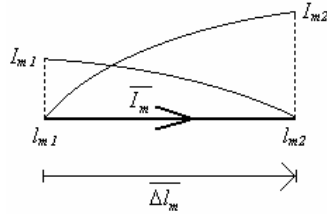


Fig. 4. Função expansão senoidal em um segmento.

As funções teste utilizadas no MoM são as seguintes funções pulso

$$P_m(l) = \begin{cases} 1 & , \text{ para } l_{mc} < l < l_{(m+1)c} \\ 0 & , \text{ fora} \end{cases} \quad (10)$$

sendo l_{mc} o ponto médio entre os pontos l_{n1} e l_{n2} (Figura 4). Integrando o produto da componente tangencial ao fio de \bar{E}^e por uma função teste genérica $P_m(l)$, obtemos

$$\int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} [\bar{E}^e P_m(l)] \cdot \bar{dl} = \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} P_m(l) [-j\omega\bar{A} - \nabla\Phi] \cdot \bar{dl}, \text{ ou} \quad (11)$$

$$\int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} \bar{E}^e dl = \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} [j\omega\bar{A} + \nabla\Phi] \cdot \bar{dl} \quad (12)$$

onde E^i é a componente tangencial ao fio de \bar{E}^e . Substituindo (8) e (2)-(4) em (12), e fazendo

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-\gamma^2 \int_{l_{n1}}^{l_{n2}} \bar{I}_n(l') g(R) dl' + \int_{l_{n1}}^{l_{n2}} \frac{dI_n}{dl'} \nabla g(R) dl' \right) = L\bar{I}_n, \quad (13)$$

tem-se

$$\int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} \bar{E}^i dl = \sum_{n=1}^N \left\{ - \int_{l_{nc}}^{l_{(m+1)c}} L\bar{I}_n \cdot \bar{a}_i dl \right\}. \quad (14)$$

Colocando a corrente na seguinte forma

$$\bar{I}_n = I_{n1} \bar{f}_{n1} + I_{n2} \bar{f}_{n2}, \quad (15)$$

$$\bar{f}_{n1} = \frac{\sinh \gamma(l_{n2} - l)}{\sinh \gamma\Delta l_n} \bar{a}_n,$$

$$\bar{f}_{n2} = \frac{\sinh \gamma(l - l_{n1})}{\sinh \gamma\Delta l_n} \bar{a}_n,$$

teremos

$$\int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} \bar{E}^i dl = \sum_{n=1}^N \left\{ - \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} [I_{n1} L\bar{f}_{n1} + I_{n2} L\bar{f}_{n2}] \cdot \bar{a}_i dl \right\}. \quad (16)$$

Sabendo que $I_{12}=I_2, \dots, I_{n2}=I_{(n+1)1}=I_n, \dots, I_{(N-1)2}=I_N=I_N$, temos que (16) torna-se

$$\int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} \bar{E}^i dl = - \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} I_{11} L\bar{f}_{11} \cdot \bar{a}_i dl + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ - \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} [L\bar{f}_{n2} + L\bar{f}_{(n+1)1}] \cdot \bar{a}_i dl \right\} I_n - \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} I_{N2} L\bar{f}_{N2} \cdot \bar{a}_i dl. \quad (17)$$

Para problemas de antenas e espalhamento temos que $I_{11}=I_{N2}=0$. Assim temos o seguinte sistema linear

$$V_m = \sum_{n=1}^{N-1} Z_{mn} I_n, \quad m=1,2,\dots,N-1, \quad (18)$$

onde

$$V_m = \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} \bar{E}^i dl, \quad (19)$$

$$Z_{mn} = - \int_{l_{mc}}^{l_{(m+1)c}} [L\bar{f}_{n2} + L\bar{f}_{(n+1)1}] \cdot \bar{a}_i dl. \quad (20)$$

Os valores de V_m estão relacionados com a fonte de excitação. A solução de (18) nos fornece a corrente no fio condutor.

D. Campos radiados por elementos de corrente senoidais

As expressões exatas do campo elétrico radiado por um segmento condutor com distribuição senoidal de corrente dado por (9), são [9]

$$E_z = \frac{\eta}{4\pi \sinh \gamma d} \left[(I_1 - I_2 \cosh \gamma d) \frac{e^{-\gamma R_2}}{R_2} + (I_2 - I_1 \cosh \gamma d) \frac{e^{-\gamma R_1}}{R_1} \right], \quad (21)$$

$$E_\rho = -\frac{\eta}{4\pi \rho \sinh \gamma d} \left\{ (I_1 e^{-\gamma R_1} - I_2 e^{-\gamma R_2}) \sinh \gamma d + (I_1 \cosh \gamma d - I_2) \cos \theta_1 e^{-\gamma R_1} + (I_2 \cosh \gamma d - I_1) \cos \theta_2 e^{-\gamma R_2} \right\}. \quad (22)$$

Os parâmetros geométricos utilizados nestas expressões são do sistema de coordenada local mostrado na Figura 5.

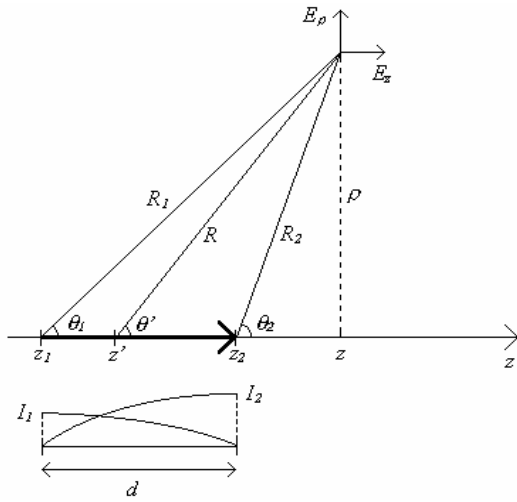


Fig. 5. Sistema de coordenada local utilizado em (21) e (22).

E. Teoria da imagem modificada

Suponha que temos uma corrente \$I\$ (Figura 6(a)) abaixo do solo, e queremos determinar a sua imagem \$I'\$ (Figura 6(b)). Estas duas correntes são utilizadas para calcular os campos eletromagnéticos dentro do solo. Para o cálculo dos campos no ar, utiliza-se uma corrente equivalente \$I''\$ (Figura 6(c)) no solo. Em resumo, podemos ter quatro situações diferentes que são explicadas a seguir.

1) *Fonte de corrente no solo e ponto de observação no solo:* O campo elétrico pode ser calculado como a soma do campo produzido pela corrente \$I\$ e sua imagem \$I'\$:

$$I' = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} I. \quad (23)$$

2) *Fonte de corrente e ponto de observação no ar:* O campo elétrico pode ser calculado como a soma do campo produzido pela corrente fonte \$I\$ e sua imagem \$I'\$:

$$I' = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} I. \quad (24)$$

3) *Fonte de corrente no solo e ponto de observação no ar:* O campo elétrico pode ser calculado como aquele produzido por uma fonte de corrente modificada \$I''\$:

$$I'' = \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} I. \quad (24)$$

4) *Fonte de corrente no ar e ponto de observação no solo:* O campo elétrico pode ser calculado como aquele produzido por uma fonte de corrente modificada \$I''\$:

$$I'' = \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} I. \quad (25)$$

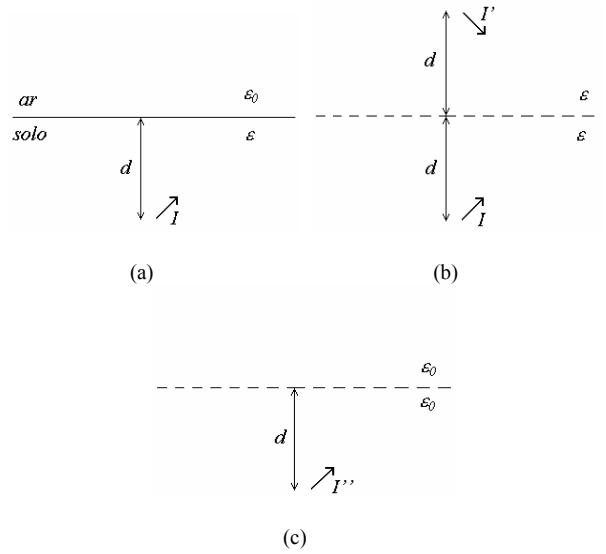


Fig. 6. (a) Fonte de corrente no solo. (b) Fonte de corrente e sua imagem. (c) Fonte de corrente equivalente para cálculo dos campos no ar.

III. EXEMPLO NUMÉRICO

Com base na teoria apresentada acima desenvolvemos um programa computacional no *software* Matlab 6 para calcular o potencial em três pontos diferentes de uma haste horizontal de comprimento \$L\$ a uma profundidade \$h\$ do solo (Figura 7). A fonte de corrente aplicada na ponta da haste tem a seguinte forma mostrada na Figura 8. Os parâmetros utilizados nesta simulação da fonte e do sistema são mostrados na Tabela 1.

TABELA I
VALORES DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO.

PARÂMETRO	Valor
\$L\$ (comprimento da haste)	15m
\$h\$ (profundidade da haste)	0,6m
\$a\$ (raio da haste)	12mm
\$\sigma\$ (condutividade do solo)	(1/70) (\$\Omega\text{m}\$)\$^{-1}\$
\$\mu_r\$	1
\$\epsilon_r\$	15

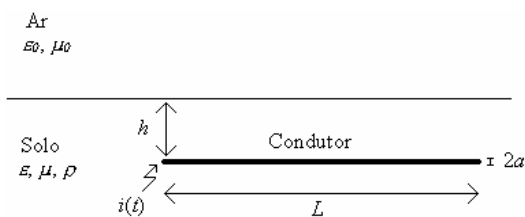


Fig. 7. Sistema de aterramento composto por uma haste horizontal de comprimento L a uma profundidade h do solo.

As Figura 8 e Figura 9 mostram os resultados obtidos dos potenciais em três pontos diferentes ao longo da haste. Com o objetivo de comparar os nossos resultados com outros disponíveis na literatura, as Figura 8 e Figura 9 mostram os resultados experimentais e teóricos apresentados em [9], respectivamente.

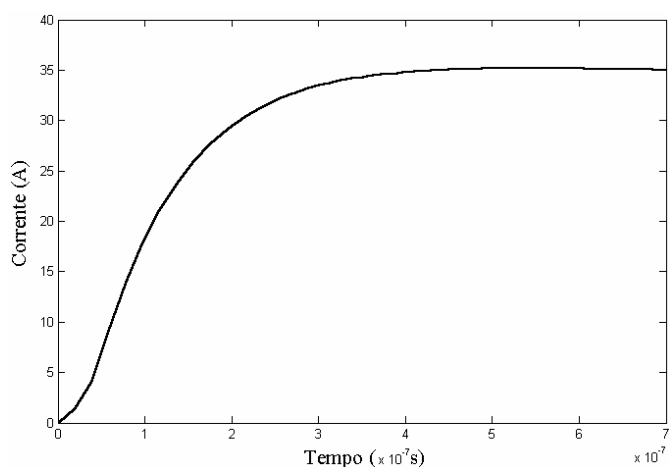


Fig. 8. Corrente injetada na extremidade da haste do sistema mostrado na Figura 7 com os valores dos parâmetros da Tabela 1.

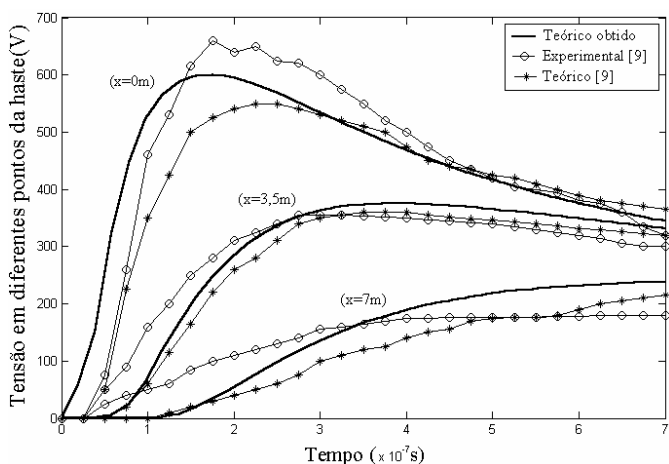


Fig. 9. Comparação entre os resultados obtidos aqui com aqueles teóricos apresentados e experimentais de [9]. Estes resultados são do sistema mostrado na Figura 7 com os valores dos parâmetros da Tabela 1.

O número de funções base utilizados nestes cálculos obtidos foi $N=10$. Simulamos também este mesmo sistema com $N=40$ funções base, a diferença entre os resultados é

pequena (entre 5-10%). O intervalo de tempo usado na análise foi de 0 a 70 microssegundos.

IV. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um modelo matemático baseado na teoria dos campos eletromagnéticos para análise de transiente em sistemas de aterramento elétrico. Este modelo consistiu na utilização do MoM para resolver numericamente a equação integral dos potenciais derivada de um sistema composto por hastes metálicas sem perdas. A aproximação da teoria da imagem modificada foi usada no modelo para considerar a interface entre o ar e o solo.

A utilização de funções base senoidais no modelo para aproximar a corrente na haste possibilitou obter resultados mais precisos, visto que este tipo de função fornece expressões exatas para o campo elétrico radiado de um segmento com distribuição senoidal de corrente. Estas expressões exatas são fundamentais para o cálculo de potenciais elétricos.

Algumas simulações foram feitas, utilizando o programa computacional desenvolvido, para o exemplo de uma haste horizontal. Observamos que acima de 20 segmentos os resultados possuem pouca diferença entre si. Com relação a precisão dos resultados, acreditamos que podemos obter melhores resultados se considerarmos as perdas nos condutores. Esta será uma proposta para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Kindermann e J. M. Camoagnolo, *Aterramento Elétrico*, 5ª ed., Ed. Florianópolis: UFSC, 2002.
- [2] L. F. Gonos, F. V. Topalis, L. A. Stathopoulos, "Transient impedance of grounding rods," *High Voltage Engineering Symposium*, Conference Publication No. 467 – IEE, 22-27 August 1999.
- [3] A. Geri, "Behavior of grounding systems excited by high impulse currents: the model and its validation," *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 14, No. 3, pp. 1008-1017, July 1999.
- [4] Y. Liu, M. Zitnik, R. Thottappillil, "An improved transmission-line model of grounding system," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, v. 43, No. 3, pp. 348-355, August 2001.
- [5] F. Navarrina, I. Colominas, "Why do computer methods for grounding analysis produce anomalous results?," *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 18, No. 4, pp. 1192-1202, October 2003.
- [6] V. Dorié, D. poljak, V. Roje, "Transient response of the earthing electrode in a homogeneous lossy medium," *17th international Conference on Applied Electromagnetics and Communications – ICECom 2003*, Dubrovnik, Croatia, 1-3 October 2003.
- [7] G. Ala, M. L. Di Silvestre, E. Francomano, A. Tortorici, "Wavelet-based efficient simulation of electromagnetic transient in a lightning protection system," *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 39, No. 3, pp. 1257-1260, May 2003.
- [8] L. Grcev, F. Dawalibi, "An electromagnetic model for transients in grounding systems," *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 5, No. 4, pp. 1773-1781, November 1990.
- [9] L. D. Grcev, "Transient electromagnetic fields near large earthing systems," *IEEE Trans. on Magnetics*, v. 32, No. 3, pp. 1525-1528, May 1996.
- [10] T. Takashima, T. Nakae, R. Ishibashi, "High frequency characteristics of impedances to ground and field distributions of ground electrodes," *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-100, No. 4, pp. 1893-1900, April 1981.
- [11] D. Hanselman, B. Littlefield, *MATLAB 6: Curso Completo*, Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003.