

CAPÍTULO 1

LINHAS DE TRANSMISSÃO E A CARTA DE SMITH

1.1 - INTRODUÇÃO

As linhas de transmissão são estruturas utilizadas para transportar energia eletromagnética de um ponto a outro de um sistema[2]. Os casos mais usuais são os das linhas telefônicas e das linhas ligando equipamentos às antenas. Mas além de serem elementos de ligação, em altas frequências as linhas de transmissão funcionam como elementos de circuito, substituindo indutores e capacitores [6].

Daí a importância do estudo da teoria de linhas de transmissão em comunicações.

O que diferencia o estudo das linhas de transmissão do estudo de circuitos é que nas linhas os parâmetros resistência, indutância e capacitância estão distribuídos ao longo da linha e não concentrados em unidades como nos circuitos comuns.

Entretanto, pode-se, num trecho infinitesimal da linha, considerar os parâmetros como sendo concentrados e então fazer a análise pela teoria de circuitos e depois deduzir o comportamento da linha em seu comprimento total.

Mesmo sem uma análise matemática é possível antecipar certas propriedades intrínsecas às linhas de transmissão.

A impedância de entrada, por exemplo, numa linha de comprimento infinito independe da impedância na qual a linha está terminada. Isso ocorre porque aplicadas tensão e corrente na sua entrada, elas nunca chegarão ao fim da linha e assim a impedância terminal nunca se fará perceber.

Por outro lado, se uma linha de comprimento finito for terminada numa impedância de valor exatamente igual ao da impedância característica da linha, tensão e corrente não perceberão diferença entre a impedância da linha e a impedância da carga. Desse modo, na entrada da linha, tudo ocorrerá como se ela fosse de comprimento infinito.

1.2 – ANÁLISE MATEMÁTICA DA LINHA EM REGIME ESTACIONÁRIO

Como já mencionado, numa linha de transmissão, seus parâmetros resistência, condutância, indutância e capacitância se encontram distribuídos.

Mesmo assim, num trecho infinitesimal, é possível considerar os parâmetros como concentrados; podendo-se, a partir disso, utilizar a teoria de circuitos. Em seguida, a partir do trecho infinitesimal, deduz-se o comportamento da linha em seu comprimento total.

Uma linha de transmissão uniforme pode ser representada como uma associação em cascata de infinitas seções de impedância série e admitâncias em paralelo [7], como mostrado em Fig. 1.1.

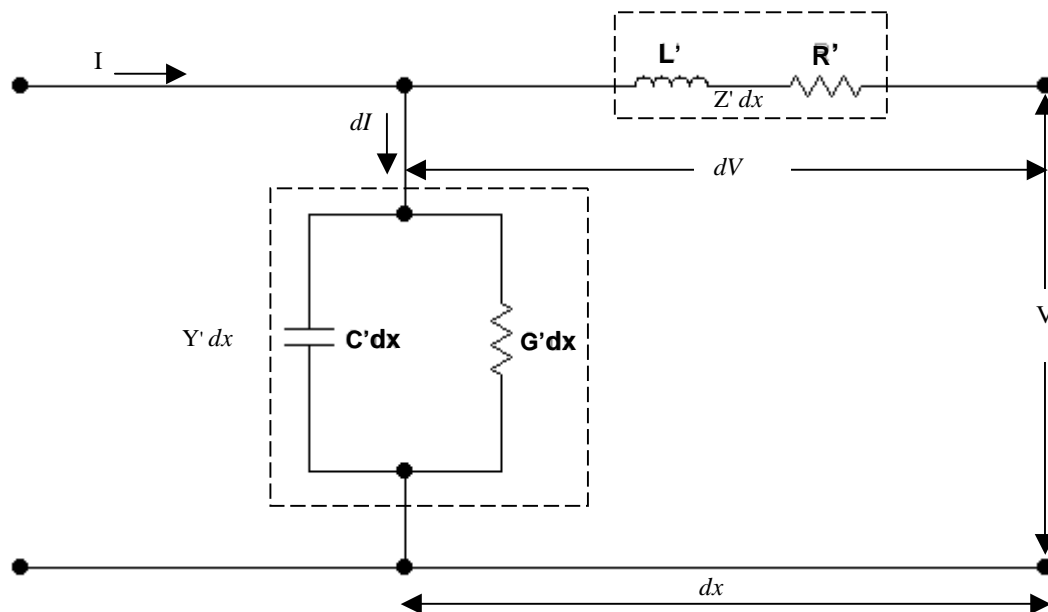


Fig. 1.1 – Circuito equivalente de uma seção elementar de linha de transmissão.

No trecho infinitesimal, a queda de tensão é:

$$dV = IZ' dx, \quad (1.1)$$

onde $Z' = R' + j\omega L'$,

em que

R' é a resistência por unidade de comprimento

e

L' é a indutância por unidade de comprimento.

Assim como a corrente vale:

$$dI = -VY' dx, \quad (1.2)$$

onde $Y' = G' + j\omega C'$,

em que

G' é a condutância por unidade de comprimento

e

C' é a capacitância por unidade de comprimento.

Resolvendo-se as equações 1.1 e 1.2, encontram-se as expressões completas para V e I [6][7]:

$$V = \frac{1}{2} \left[(V_C + Z_0 I_C) e^{\gamma x} + (V_C - Z_0 I_C) e^{-\gamma x} \right] \quad (1.3)$$

e

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_C + Z_0 I_C}{Z_0} \right) e^{\gamma x} + \left(\frac{V_C - Z_0 I_C}{Z_0} \right) e^{-\gamma x} \right] \quad (1.4)$$

onde $\gamma = \sqrt{Z' Y'}$ e $Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$,

V_C é a tensão na carga

e

I_C é a corrente na carga.

As equações (1.3) e (1.4) podem ainda ser expressas numa forma mais compacta,

$$V = V_C \frac{(Z_C + Z_0)}{2Z_C} \left[e^{\gamma x} + \Gamma e^{-\gamma x} \right] \quad (1.5)$$

$$I = I_C \frac{(Z_C + Z_0)}{2Z_0} \left[e^{\gamma x} - \Gamma e^{-\gamma x} \right] \quad (1.6)$$

$$\text{onde } \Gamma = \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0}. \quad (1.7)$$

O coeficiente Γ é conhecido como coeficiente ou fator de reflexão de tensão.

1.3 - CONSTATANTE DE PROPAGAÇÃO

O termo $\gamma = \sqrt{Z'Y'}$ é uma constante complexa que altera a amplitude e a fase tanto da tensão quanto da corrente ao longo da linha. Sendo, por esse motivo, chamada de constante de propagação (γ).

Tem-se que

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z'Y'} \quad (1.8)$$

onde α e β são constante de atenuação e constante de fase, respectivamente.

1.4- IMPEDÂNCIA CARACTERÍSTICA

Numa linha de comprimento infinito, aplicada um tensão na entrada, flui uma corrente proporcional àquela tensão e inversamente proporcional a uma impedância característica da linha $Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$. A relação entre a tensão e a corrente em qualquer ponto da linha é independente da carga que for colocada no seu final.

Essa impedância característica pertence somente à linha, pois depende apenas de seu parâmetros[7]

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (1.9)$$

Para finalizar, a impedância em qualquer ponto da linha de transmissão pode ser encontrada através da relação entre a tensão e a corrente $\left(\frac{V}{I}\right)$ naquele ponto.

Desse modo, a partir das equações 1.2.5 e 1.2.6, a impedância em qualquer posição pode ser determinada através da expressão

$$Z = Z_0 \frac{e^{\gamma x} + \Gamma e^{-\gamma x}}{e^{\gamma x} - \Gamma e^{-\gamma x}}, \quad (1.10)$$

1.5 - COEFICIENTE DE REFLEXÃO

O coeficiente de reflexão Γ em determinado ponto da linha de transmissão é definido como a relação entre a amplitude da onda refletida e a amplitude da onda incidente naquele ponto.

A onda refletida resulta da onda incidente ao encontrar uma impedância terminal diferente de Z_0 (Fig. 1.2). A onda de tensão refletida é dada por

$$V_{\text{ref}} = \Gamma V_{\text{inc}} \quad (1.11)$$

e a onda de corrente refletida é dada por

$$I_{\text{ref}} = -\Gamma I_{\text{inc}} \quad (1.12)$$

onde

$$\Gamma(x) = \frac{(Z_C - Z_0)}{(Z_C + Z_0)} e^{-2\gamma x}. \quad (1.13)$$

Verifica-se facilmente que, na carga onde $x=0$, o coeficiente de reflexão é :

$$\Gamma = \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0}. \quad (1.14)$$

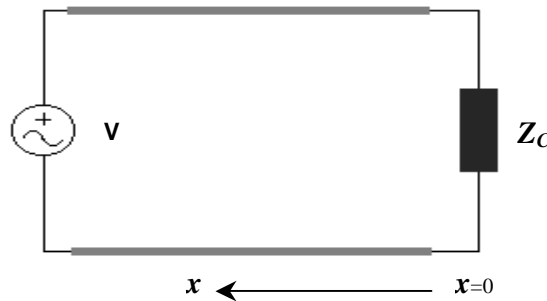


Fig. 1.2 – Linha terminada em uma impedância de carga.

Quando a terminação Z_C é igual a Z_0 não há reflexão, o que é expresso matematicamente por $\Gamma=0$. Tem-se nesse caso o que se chama de casamento de impedâncias, onde toda a energia incidente é absorvida pela carga.

Quando a linha é terminada em curto-circuito ($Z_C=0$), a tensão refletida tem sinal oposto à tensão incidente; daí $\Gamma = -1$.

Por outro lado, quando a linha é terminada em circuito aberto ($Z_C=\infty$), tem-se $\Gamma = +1$. Isto significa que as tensões incidente e refletida se somam e as correntes incidente e refletida se cancelam.

1.6- ONDAS ESTACIONÁRIAS

Quando uma linha de transmissão é terminada por uma carga igual a sua impedância característica (Z_0), a energia flui do gerador para a carga sem reflexão.

Nessa situação, a impedância de entrada "vista" pelo gerador é igual a Z_0 e tem-se aí uma condição chamada "linha casada". Para qualquer outra impedância de carga diferente de Z_0 , ocorre reflexão e parte da potência incidente retorna ao gerador. Dessa forma, as duas ondas caminhanças, incidente e refletida, com direções de propagação opostas, dão origem a uma onda estacionária de tensão (Fig. 1.3 e Fig. 1.4) e outra de corrente.

Na ausência de reflexão, o módulo da tensão ao longo da linha é uma constante igual a $|V_+|$. Porém, quando há reflexão, as ondas incidente e refletida produzem uma distribuição de onda estacionária, que em certos pontos apresenta máximos e mínimos. Nesse caso, o módulo da tensão ao longo da linha é dado por:

$$|V| = |V_+| [(1 + \Gamma^2) - 4\Gamma \sin^2(\beta\ell - \theta/2)]. \quad (1.15)$$

Esta expressão mostra que $|V|$ oscila entre os valores máximo $|V_+|(1 + \Gamma)$ quando $\beta\ell - \theta/2 = n\pi$ e mínimo $|V_+|(1 - \Gamma)$ quando $\beta\ell - \theta/2 = n\pi + \pi/2$, onde n é um inteiro[2]. Estes resultados também concordam com a intuição física, já que mostram que a tensão máxima ocorre quando as ondas incidente e refletida se somam em fase e que a tensão mínimo se dá quando estão defasadas de 180° . Máximos e mínimos adjacentes estão espaçados de meio comprimento de onda ($\lambda/2$). A distância entre um máximo e um mínimo adjacentes é um quarto de onda ($\lambda/4$).

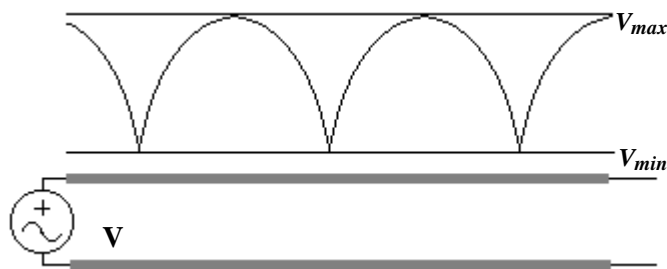


Fig. 1.3 – Onda estacionária para uma linha aberta.

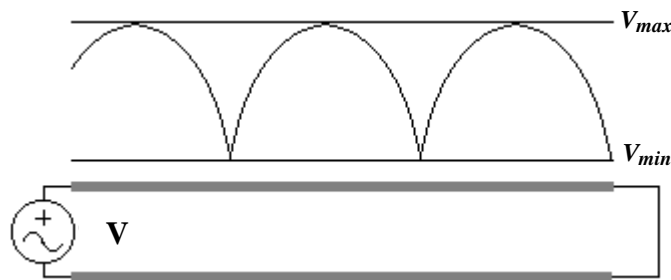


Fig. 1.4 – Onda estacionária para uma linha em curto.

1.7 – RELAÇÃO DE ONDA ESTACIONÁRIA

A relação entre a tensão máxima e a tensão mínima numa linha de transmissão é chamada de relação de onda estacionária (S) e é definida como

$$|S| = |V_{\max} / V_{\min}|. \quad (1.16)$$

Os máximos de tensão ocorrem onde a onda refletida de tensão está em fase com a incidente e os mínimos, onde ocorre defasamento de 180° .

O coeficiente de onda estacionária também pode ser expresso em função do coeficiente de reflexão

$$S = (1 + |\Gamma|) / (1 - |\Gamma|). \quad (1.17)$$

Em máximos e mínimos de tensão a impedância é puramente resistiva [1][6] e é dada por

$$Z_{\max} = S Z_0 \quad (1.18)$$

e

$$Z_{\min} = Z_0 / S \quad (1.19)$$

Máximos e mínimos de corrente, tensão e impedância ocorrem de meio em meio comprimento de onda.

Saber suas localizações pode ser uma informação muito útil para a solução de problemas com linhas de transmissão.

Na carta de Smith, a relação entre o máximo e o mínimo da onda estacionária é representada como um círculo. É simples determinar o raio desse círculo e traçá-lo na carta. Na linha, onde ocorre um máximo (ou mínimo) de tensão, a impedância é puramente resistiva e seu valor é SZ_0 ou Z_0/S respectivamente. Estes valores de impedância devem ser divididos por Z_0 para se obter o valor normalizado que se usa no gráfico; obtendo-se S ou $1/S$. Assim, basta procurar na carta, sobre a linha de

resistência pura, o valor igual a S ou $1/S$ para traçar o círculo com centro na origem da carta.

1.8 - CARTA DE SMITH

As equações envolvidas no estudo de linhas de transmissão — embora simples na forma — envolvem números complexos que, em geral, não são facilmente calculados. Uma simples observação dessas equações não revela diretamente o que está ocorrendo em determinado ponto da linha.

A carta de Smith é uma ferramenta de projeto que facilita a manipulação dessas equações. Atualmente, com os recursos computacionais disponíveis, seu potencial é reconhecido muito mais pela facilidade de visualização dos fenômenos do que do ponto de vista da precisão de cálculos.

A carta de Smith simplifica de maneira extraordinária a solução dos problemas de linhas, principalmente em alta frequência. É tal a simplificação e o poder de se visualizar graficamente as soluções que o gráfico é universalmente adotado não somente no caso de linhas de transmissão como também em outros problemas envolvendo impedâncias ou admitâncias.

O gráfico de Smith compõe-se basicamente de dois gráficos superpostos. O primeiro é o plano complexo das impedâncias, transformado da usual forma retangular para a forma circular. O segundo gráfico, refere-se à linha de transmissão, contendo os círculos dos valores de S (relação de onda estacionária) e as distâncias ao longo da linha.

O traçado da carta de Smith é feito a partir da expressão abaixo:

$$\Gamma = \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0} \quad (1.20)$$

As impedâncias afixadas na carta são normalizadas em relação à impedância característica (Z_0). Usando-se z para identificar a impedância de carga normalizada,

$$z = r + jx = \frac{Z_C}{Z_0} = \frac{R_C + jX_C}{Z_0} \quad (1.21)$$

e, assim,

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (1.22)$$

ou

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}. \quad (1.23)$$

Na forma polar, $|\Gamma|$ e ϕ são usados, respectivamente, como módulo e ângulo do coeficiente de reflexão (Γ). Tomando Γ_r e Γ_i como partes real e imaginária de Γ ,

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i. \quad (1.24)$$

Assim, após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever as equações (1.8.6) e (1.8.7); ficando evidente a natureza das curvas nos eixos Γ_r e Γ_i .

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2, \quad (1.25)$$

e

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2. \quad (1.26)$$

A primeira destas equações descreve uma família de círculos, onde cada círculo está associado a um valor específico da resistência r (Fig. 1.5). Por exemplo, se $r=0$, o raio deste círculo de resistência zero tem valor unitário e é centralizado em $\Gamma_r=0$ e $\Gamma_i=0$ (na origem). Isso confirma que, para uma reatância pura nos terminais de uma linha, tem-se um coeficiente de reflexão de módulo unitário ($|\Gamma|=1$).

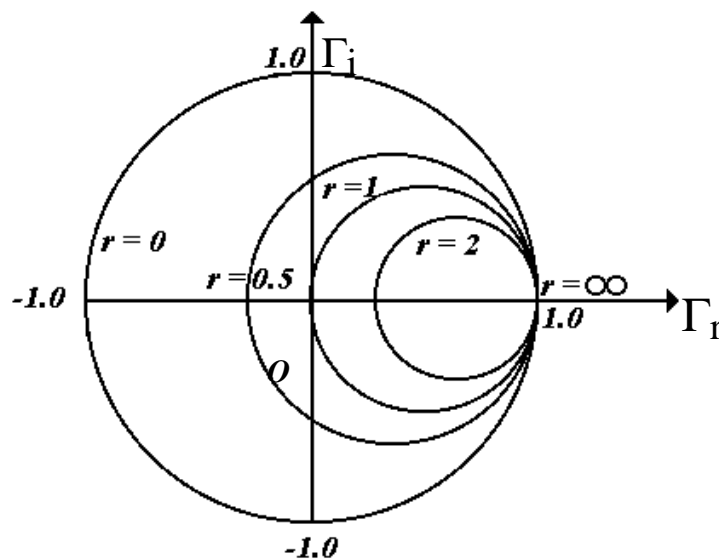


Fig. 1.5 – Representação dos círculos correspondentes à parte real da impedância normalizada.

A equação (1.26) também representa uma família de círculos, mas cada um destes é definido para um valor particular de x , em vez de r (Fig. 1.6). As linhas de reatância são arcos que se originam ao lado direito do sistema de eixos. Os valores positivos e negativos de reatância representam valores de impedância indutiva e capacitiva, respectivamente. A linha central representa a linha de reatância nula. Portanto, qualquer valor de impedância que se localizar sobre essa linha será puramente resistiva.

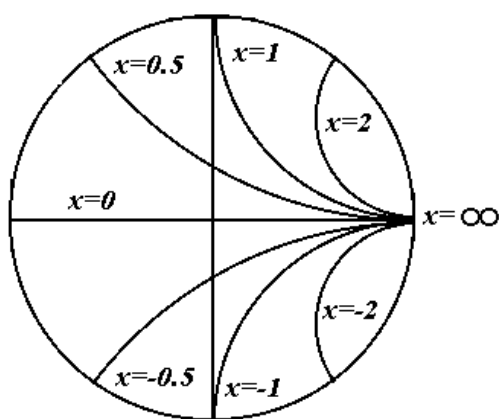


Figura 1.6 – Representação dos círculos correspondentes à parte imaginária da impedância normalizada.

Uma volta completa em torno da carta de Smith representa um deslocamento de meio comprimento de onda (0.5λ). Isso é suficiente porque de meia em meia onda as impedâncias se repetem. Uma escala em graus também pode ser utilizada no perímetro da carta (Fig. 1.7).

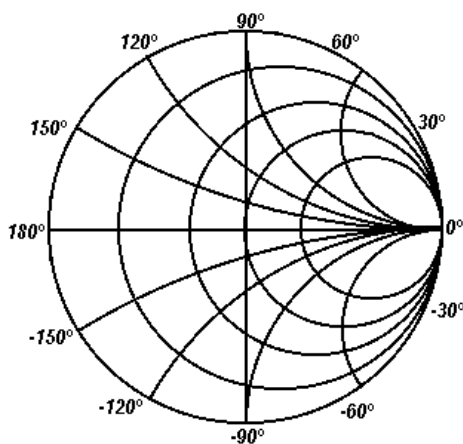


Figura 1.7 – A carta de Smith com uma escala em sua circunferência.