

## 4 - SISTEMAS DIGITAIS

### 4.1 – Sinais digitais

Sistemas digitais são sistemas em que o sinal de informação é transmitido apenas por amostras tomadas, do sinal original, a intervalos constantes, isto quer dizer que em vez de se transmitir o sinal em todo o intervalo de tempo, transmite-se apenas algumas amostras em intervalos de tempos periódicos.

Para se recuperar o sinal original a partir de um sinal amostrado, é necessário que a frequência de amostragem seja maior ou igual à duas vezes a maior frequência do sinal de mensagem, esta é conhecida como a condição de Nyquist da amostragem.[ 1 ],[ 2 ],[ 3 ],[ 4 ]

$$f_s \geq 2 f_m \quad (4.1)$$

onde

$f_s$  - frequência de amostragem

$f_m$  - maior frequência do sinal de mensagem

Os valores de cada amostra podem ser representadas pela altura de cada pulso de amostragem ( PAM – *Pulse Amplitude Modulation* )

Neste método, os valores das amostras são transmitidos por pulsos, cujas amplitudes variam proporcionalmente com os valores das amostras.

Existem basicamente três tipos de amostragem ou modulação de amplitude de pulso: amostragem ideal, amostragem natural e amostragem instantânea. Esses tipos de amostragens são bem explicadas na bibliografia.

Além da modulação PAM, onde o valor da amostra é colocado na amplitude do pulso, existe também a modulação por posição de pulso ( PPM – *Pulse Position Modulation* ), onde todos os pulsos têm as mesmas amplitudes e larguras, o valor da amostra varia apenas a posição do pulso.

Existe também a modulação por largura de pulso ( PWM – *pulse Width Modulation* ), neste caso o valor da amostra varia a largura do pulso, mantendo a posição (fase) e amplitude constante.

E por último existe a modulação por código de pulso (PCM – *Pulse Code Modulation*) que consiste em codificar os valores das amostras por uma sequência de pulsos, onde cada sequência de pulso diferente relaciona-se à um valor de amostra.

Antes de ser feita esta modulação ( PCM ), é necessário aproximar o valor da amostra para um nível de quantização mais próximo. Esta quantização consiste em discretizar os valores das amostras, tornando os níveis que o sinal pode assumir finito, pois só assim pode-se representar o sinal por um número de códigos finito.

A figura abaixo mostra um exemplo de um código unipolar NRZ.

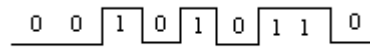


Figura 4.1: Código Unipolar NRZ.

A tabela abaixo mostra um exemplo de uma codificação de três bits.

Nível da amostra	Código binário	Seqüência de pulsos
0	000	_____
1	001	_____
2	010	____     ____
3	011	____
4	100	_____
5	101	____
6	110	____
7	111	

Tabela 4.1: Codificação de três bits.

O processo de codificação é feito basicamente em três etapas: amostragem, quantização e codificação.

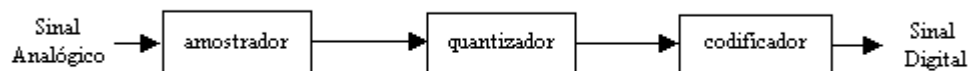


Figura 4.2: Processo de codificação.

## 4.2 - Transmissão em banda base[ 3 ]

A transmissão em banda base consiste em se transmitir um sinal de mensagem, entre dois pontos, sem haver o processo de modulação, quer dizer, o próprio sinal é enviado sem fazer uma translação do seu espectro original. Este tipo de transmissão é feito entre pontos do transmissor ou receptor, por exemplo.

Um trem de pulsos tem a seguinte representação no domínio do tempo e no domínio da frequência

$$p(t) = Af_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}(nf_0\tau) e^{jn2\pi f_0 t} \Leftrightarrow P(f) = Af_0 \text{Sinc}(f\tau) \quad (4.2)$$

onde

A - Amplitude do pulso.

$f_0$  - frequência do pulso ( $W_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ ).

$\tau$  – duração do pulso.

observa-se desta expressão, que o seu espectro é uma sequência de impulsos, como se deveria esperar, de período  $f_0$  que se estende em todo espectro. A envoltória deste trem de impulsos é a função “Sinc”, a qual passa pela origem a primeira vez em  $f=1/\tau$ . Então observa-se que a largura do pulso é que determina a forma do espectro.



Figura 4.3: Formatação de pulsos.

Para o caso em que  $A=1$ ,  $T_0=1$  e  $\tau=0.25$ , tem-se os seguintes gráficos no domínio do tempo e no domínio da frequência, deste trem de pulsos.

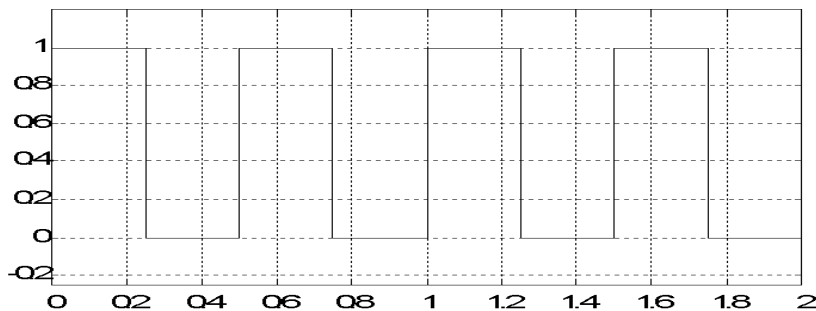


Figura 4.4: Trem de pulsos com código unipolar NRZ.

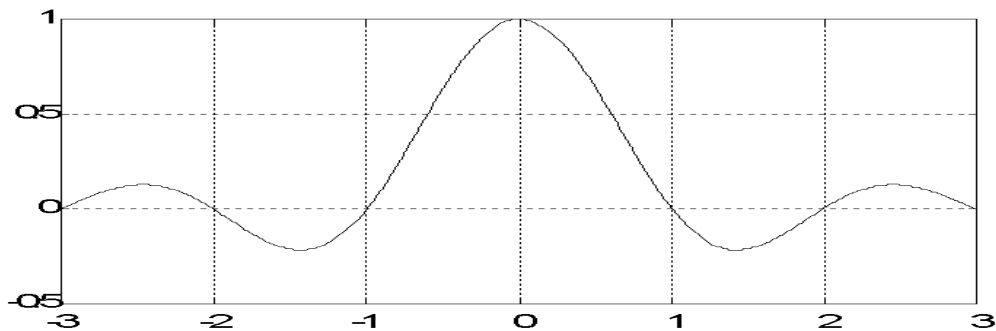


Figura 4.5: Espectro do trem de pulsos unipolar NRZ.

A formatação do pulso, Fig. 4.3, é dada de acordo com a frequência de corte do FPB. É comum ser representado por um fator chamado fator de "roll-off".

$$B = \frac{V_n(1+F)}{2} \quad (4.3)$$

onde

$V_n$  - velocidade de modulação ( $V_n = 1/\tau$ ).

F - fator de "roll-off",  $0 < F < 1$ .

B - faixa do filtro.

Além da distorção do pulso na transmissão em banda base, tem-se o ruído aditivo presente no canal.

Suponha-se que o sinal digital transmitido é um bipolar, com valores de A e  $-A$ . Este sinal  $p(t)$  é adicionado com o ruído  $n(t)$  e o sinal  $y(t)$  recebido é dado por  $y(t) = p(t) + n(t)$ . Este ruído  $n(t)$  é gaussiano com média zero.

A figura abaixo mostra os gráficos de  $p(t)$  e  $y(t)$ .

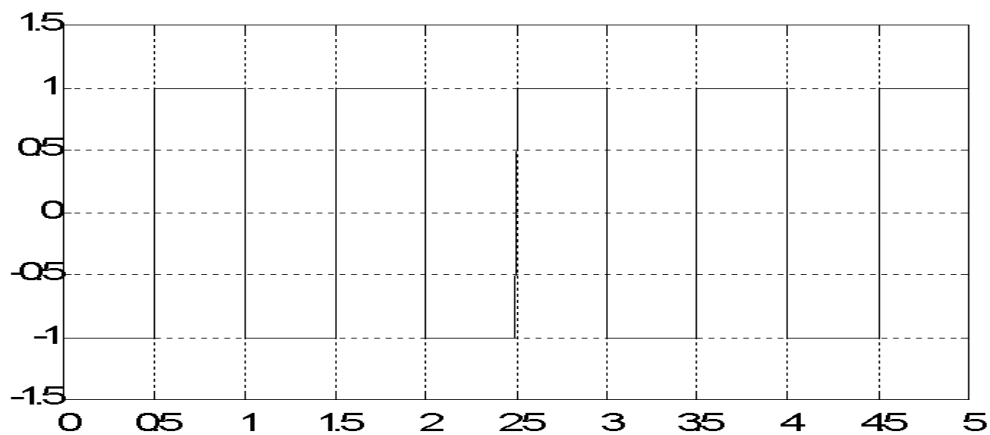
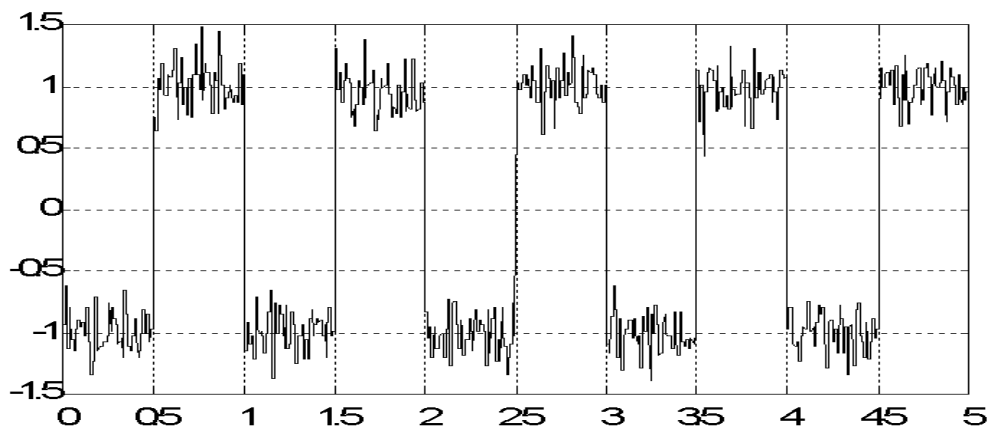


Figura 4.6: Trem de pulsos bipolar sem ruído ( $p(t)$ ).



O bit 1 recebido é uma variável aleatória ( VA ) dada por  $Y_1=A+n$  e o bit 0 também é uma VA dada por  $Y_0=-A+n$ . Considerando o nível de decisão do receptor igual à zero, então haverá erro se

$$P_e = P_1 P(Y_1 < 0) + P_0 P(Y_2 > 0) \quad (4.4)$$

onde

$P_1$  - probabilidade de ocorrência do bit 1.

$P_0$  - probabilidade de ocorrência do bit 0.

como a VA  $n$  tem distribuição gaussiana com potência  $N=\sigma^2$ , tem-se que

$$P(Y_1 < 0) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-A)^2}{2N}} dx \quad (4.5)$$

$$P(Y_0 > 0) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+A)^2}{2N}} dx \quad (4.6)$$

Considerando as mesmas ocorrências de 1 e 0 ( $P_1=P_0=1/2$ ), e observando a simetria da integral, tem-se que a probabilidade de erro será

$$P_e = P_0 = P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y+A)^2}{2}} dy \quad (4.7)$$

fazendo  $x=(y+A)/\sigma$ , tem-se que

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-A}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.8)$$

sendo

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.9)$$

tem-se que

$$P_e = g\left(\frac{A}{\sigma}\right) \quad (4.10)$$

onde

$A$  - amplitude do pulso

$\sigma$  - valor rms do ruído

Observa-se desta expressão que a probabilidade de erro decresce rapidamente para um aumento de A.

Pode-se mostrar também que se o sinal for polar ( com valores A e 0 ), tem-se a seguinte probabilidade de erro na recepção

$$P_e = g\left(\frac{A}{2}\right) \quad (4.11)$$

Comparando os casos unipolar e polar, para um mesmo valor de A, tem-se que o bipolar tem melhor desempenho que o polar.

Então pode-se concluir que na transmissão em banda base, pode-se melhorar o desempenho do sistema, na presença do ruído gaussiano aditivo, aumentando-se a relação  $A/\sigma$ , pois a função  $g(k)$  decresce rapidamente para um aumento de k, isto tanto para o código unipolar como para o bipolar, sendo que o bipolar tem melhor desempenho que o polar.

#### 4.3 - Filtro casado [ 3 ], [ 4 ], [ 5 ]

O filtro casado no receptor tem a finalidade de diminuir a taxa de erro, aumentando a relação sinal ruído ( $A/\sigma$ ) no instante em que é feita a amostragem, isto é, este filtro tem uma função de transferência que transforma o pulso recebido, com uma relação sinal ruído baixa, em outro pulso com relação sinal ruído maior. Desta forma se consegue diminuir a taxa de erros.

A função de transferência deste filtro pode ser determinada, e é dada pela seguinte expressão

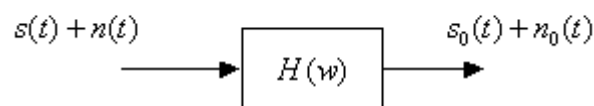
$$H(w) = S(-w) e^{-jwT} \quad (4.12)$$

onde

$S(w)$  - transformada de fourier do pulso( $s(t)$ ).

$T$  - duração do pulso.

O diagrama abaixo mostra o pulso e o ruído gaussiano na entrada do filtro casado e o pulso de saída com um ruído adicional.



O pulso na saída deste filtro tem duração  $2T$ , e o instante onde a relação sinal ruído é máxima é em  $t=T$ . O nível do pulso neste instante é numericamente igual à energia do pulso de entrada ( $E$ ).

$$s_0(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(w)|^2 dw = E \quad (4.13)$$

Sendo  $\eta/2$  a densidade espectral de potência do ruído na entrada, a potência do ruído na saída será

$$\overline{n_0^2(t)} = \frac{E}{2} \quad (4.14)$$

e a relação sinal ruído na saída será

$$= \frac{s_0^2(T)}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{2E}{1} \quad (4.15)$$

sendo  $f(t)=s(t)+n(t)$ , a resposta do filtro casado  $r(t)$  para  $f(t)$ , será

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(t-x) dx \quad (4.16)$$

Isto quer dizer que pode-se ter um filtro casado através do seguinte esquema da Fig.4.9, conhecido como correlador no tempo

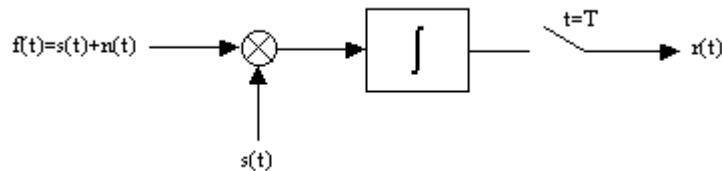
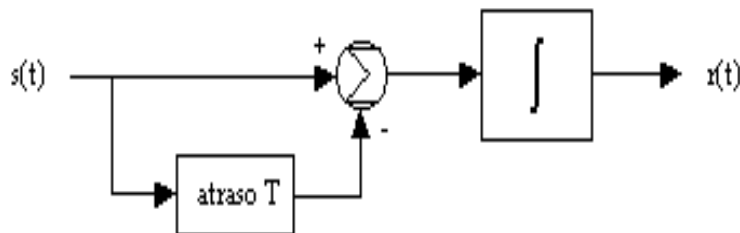


Figura 4.9: Correlador no tempo.

Será dado agora dois exemplos de filtro casado, os quais são para o pulso retangular e para o pulso senoidal.

O esquema abaixo mostra um exemplo de um filtro casado quando o pulso de entrada



é retangular de duração  $T$ .

Figura 4.10: Filtro casado para pulso retangular.

Para este filtro, a resposta impulsiva é o próprio pulso de entrada.

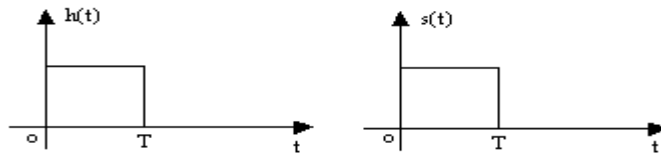
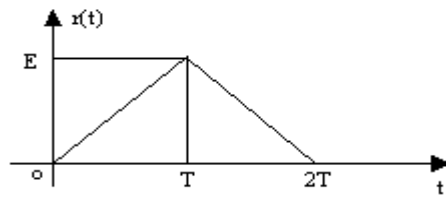


Figura 4.11: Resposta impulsiva  $h(t)$  e o pulso  $s(t)$ .

A resposta deste filtro  $r(t)$  para o pulso  $s(t)$  mostrado na Fig.4.10 é dada pela



convolução de  $s(t)$  com  $h(t)$ , a Fig. 4.12 abaixo mostra esta resposta

Figura 4.12: Resposta ao filtro casado.

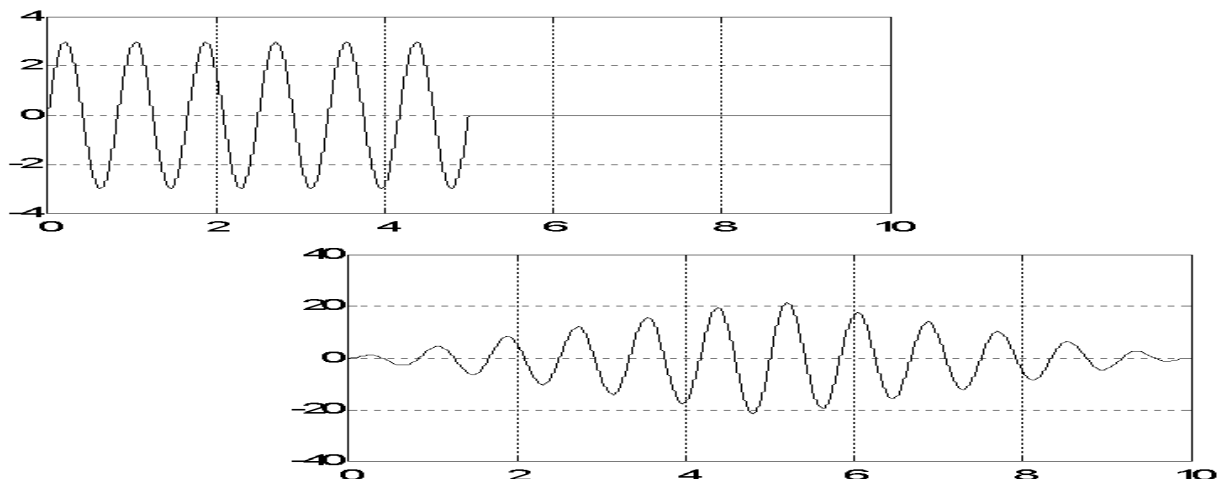
Através desta resposta, observa-se que  $E$  é o valor máximo, e ocorre em  $t=T$ , este é o instante em que tem-se a maior relação sinal ruído.

Um outro exemplo de filtro casado é quando tem-se um pulso senoidal, este pulso é dado por

$$\phi(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (4.17)$$

Onde  $f_c$  é um múltiplo de  $1/T$ . A resposta impulsiva para este filtro casado  $h(t)$  é o próprio sinal  $\phi(t)$ . Então tem-se que  $h(t) = \phi(T-t)$ .

Os sinais  $\phi(t)$  e  $\phi_0(t)$  são mostrados na Fig. 4.13 abaixo.





Uma implementação prática de um circuito que tenha esta característica é composto por um capacitor e um indutor em paralelo, como mostra a Fig. 4.14. Sua resposta impulsiva é dada por

$$h(t) = \frac{1}{C} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad 0 \leq t \leq +\infty \quad (4.18)$$

Mas esta não corresponde à resposta do filtro casado, para que ela seja igual, tem-se que anular a saída em  $t=T$ . Para isto, coloca-se um chave em paralelo na entrada, a qual serve para anular as condições iniciais no início de cada pulso. Outra chave é colocada em série na saída, esta tem a função de amostrar o sinal no instante  $t=T$ .

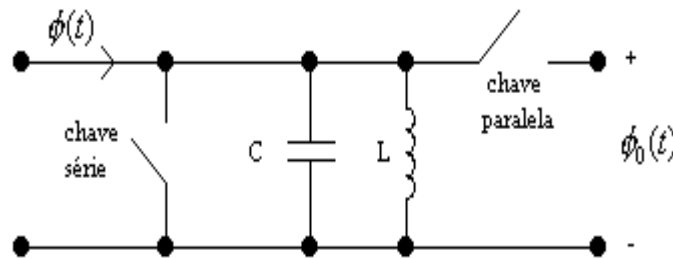


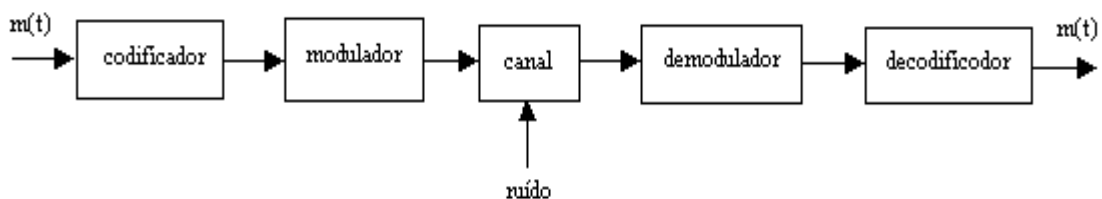
Figura 4.14: Filtro casado.

A função de transferência só da parte paralela do circuito da Fig. 4.14 é dada por

$$H(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 + s^2} \quad (4.19)$$

#### 4.4 - Modulação digital [ 2 ], [ 3 ], [ 4 ], [ 6 ]

A modulação digital pode ser de três tipos: modulação por deslocamento de amplitude ( ASK – *Amplitude-Shift Keying* ), modulação por deslocamento de frequência ( FSK – *Frequency-Shift Keying* ), ou modulação por deslocamento de fase ( PSK – *Phase-Shift*



Keying

).

Figura 4.15: Sistema de comunicação digital típico.

### Modulação ASK

Nesta modulação o sinal digital binário unipolar é multiplicado diretamente pela portadora senoidal, este sinal é dado pela seguinte expressão

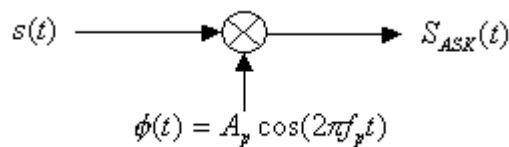
$$S_{ASK}(t) = A_p s(t) \cos(2 f_p t) \quad (4.20)$$

onde

$A_p$  - amplitude da portadora;

$f_p$  - frequência da portadora;

$s(t)$  - sinal digital.



em diagramas tem-se o seguinte modulador ASK

Figura 4.16: Modulador ASK.

A figura abaixo mostra um exemplo de um sinal ASK, onde a duração do bit é  $T=2s$ , tem-se 3 ciclos por bit e amplitude da portadora  $A_p=3$ .

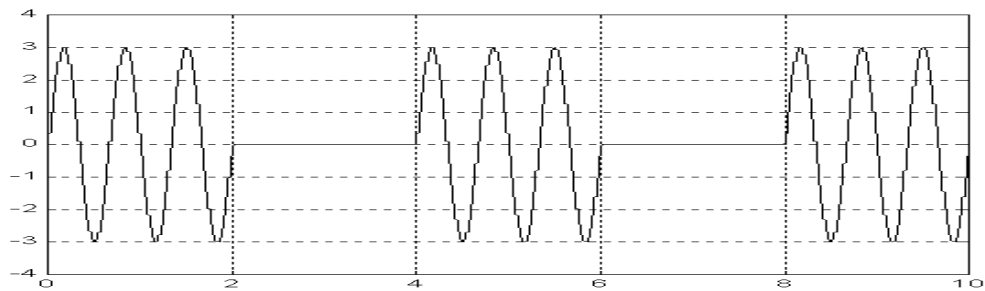


Figura 4.17: Sinal ASK.

Este modulador é similar ao modulador AM, por isso a detecção pode ser também de dois tipos, como no caso AM, síncrona ou assíncrona.

O diagrama abaixo mostra o demodulador síncrono, o qual tem uma portadora local em sincronismo com o sinal recebido tem também o FPB

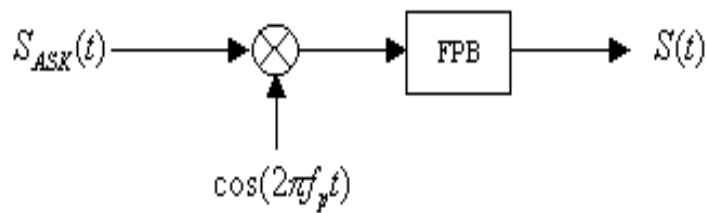
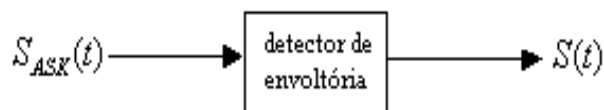


Figura 4.18: Demodulador ASK síncrono.

O demodulador não-coerente é basicamente um detector de envoltória, similar ao



demodulador de sinais AMDSB com portadora incluída.

Figura 4.19: Demodulador ASK assíncrono.

### Modulação FSK

A modulação FSK binária consiste em chavear entre duas frequências diferentes de sinais senoidais, onde se o dígito do sinal de mensagem for 1, será transmitido um pulso senoidal de frequência  $f_1$  o pulso senoidal terá outra frequência  $f_2$ . Este sinal pode ser representado por

$$S_{FSK}(t) = \begin{cases} A_p \cos(2\pi f_i t) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (4.21)$$

onde

$A_p$  - amplitude da portadora

$f_i$  - frequência do pulso

$T_b$  - período do bit

tem-se que  $i=1$  ou  $2$  que corresponde às frequências  $f_1$  e  $f_2$ . Estas frequências são dadas pela expressão  $f_i = (n_p + k)/T_b$  (4.22)

Onde para  $k=0$ , tem-se a frequência  $f_1 = n_p/T_b$ , a qual a primeira frequência que corresponde  $n_p$  (inteiro) vezes a taxa de bit ( $R=1/T_b$ ), e a outra frequência é  $f_2 = (n_p + k)/T_b$ , onde  $k$  é um inteiro positivo que diz quantos ciclos  $f_2$  é maior que  $f_1$ .

Um modulador FSK pode ser dado pelo seguinte diagrama de blocos

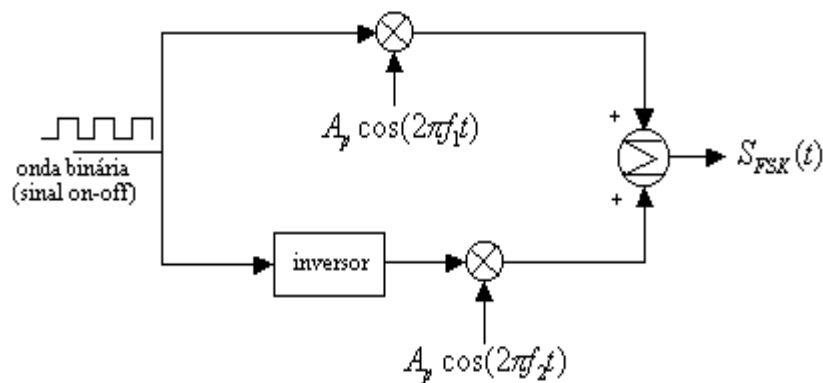
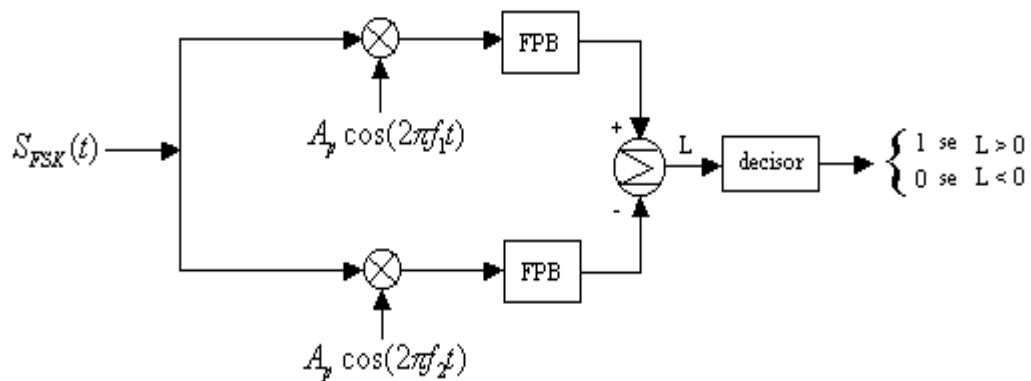


Figura 4.20: Modulador FSK.

O demodulador de um sinal FSK pode ser de dois tipos: demodulador coerente e demodulador não-coerente.

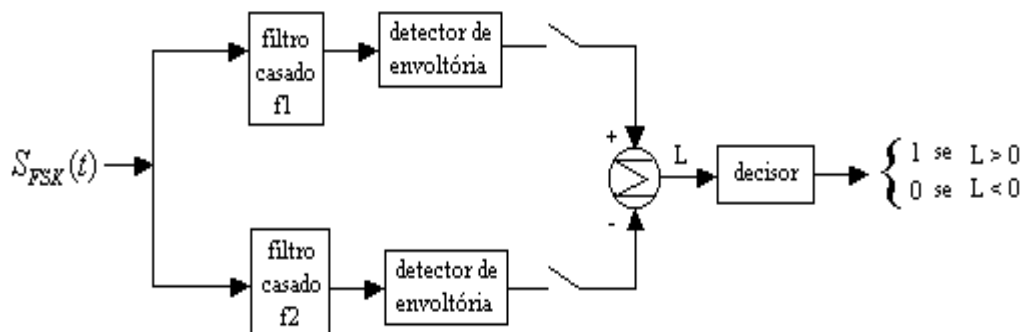


O demodulador FSK coerente corresponde ao seguinte diagrama de blocos

Figura 4.21: Demodulador FSK coerente.

Este modulador é coerente porque precisa de portadoras locais que estejam em sincronismo com o sinal recebido.

Outro tipo de demodulador FSK é o não-coerente, o qual consiste de filtros casados



seguidos de detectores envoltória, um amostrador e um decisor. O diagrama abaixo mostra-o

Figura 4.22: Demodulador FSK não-coerente.

A Fig.4.23 abaixo mostra um exemplo de um sinal FSK, com  $A_p=3$ ,  $n_p=2$ ,  $k=2$  e  $T_b=2$ .

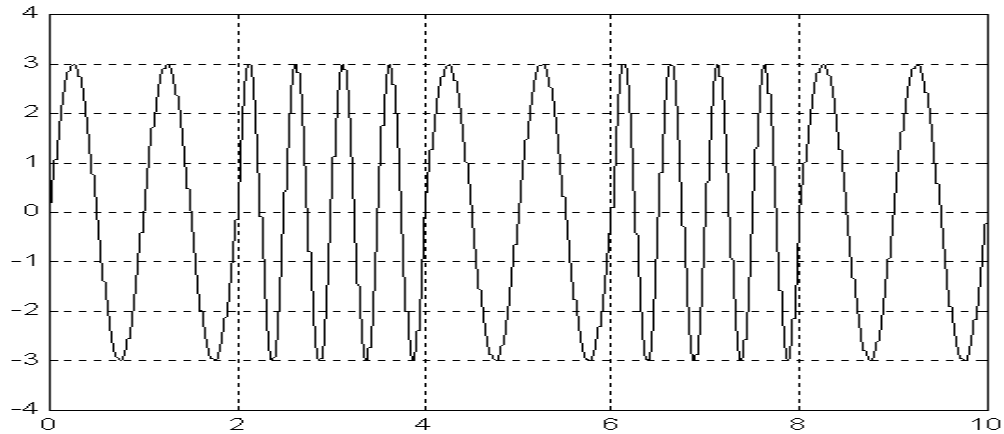


Figura 4.23: Sinal FSK.

### Modulação PSK

A modulação PSK binária consiste em chavear a fase da portadora senoidal entre dois valores. No caso binário as fases são 0 e  $\pi$ . A expressão abaixo representa um sinal PSK binário

$$S_{PSK}(t) = \begin{cases} A_p \cos(2\pi f_p t) & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{se } bit = 1 \\ -A_p \cos(2\pi f_p t) & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{se } bit = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

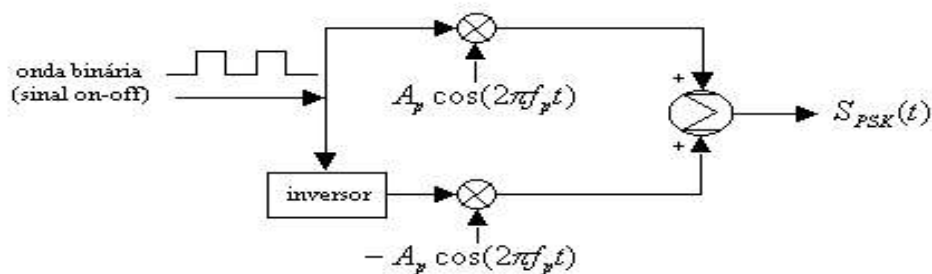
onde

$A_p$  - Amplitude da portadora

$f_p$  - Frequência da portadora

$T_p$  - Período do bit

Para este sinal, tem-se que  $f_p = n_p / T_p$ , onde  $n_p$  é um número inteiro. Um modulador PSK



pode ser obtido pelo seguinte diagrama de blocos

Figura 4.24: Modulador PSK.

Se o código binário for polar, que tem valores positivos e negativos para os bits 1 e 0 respectivamente, pode-se obter um sinal PSK apenas multiplicando este sinal pela portadora senoidal.

$$S_{PSK}(t) = m(t) A_p \cos(2 f_p t) \quad (4.24)$$

A Fig. 4.25 abaixo mostra um exemplo de um sinal PSK binário, onde  $A_p=3$ ,  $T_b=2$  segundos e  $n_p=3$  ciclos por bit.

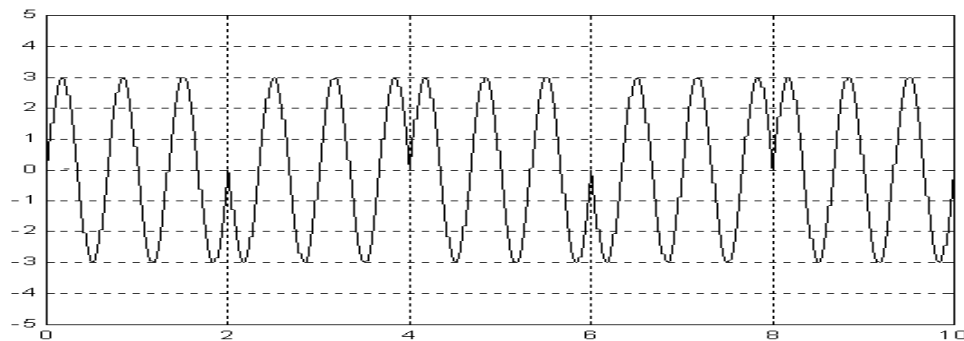
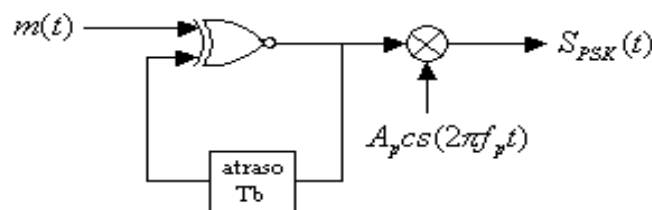


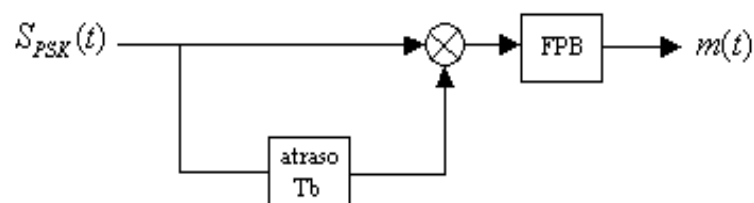
Figura 4.25: Sinal PSK.

Existe também um outro tipo de modulador PSK conhecido como diferencial PSK (DPSK), que consiste em codificar o sinal de mensagem de tal forma que na demodulação não necessita-se de um gerador local síncrono. Por esta característica esta modulação também é chamada de PSK não-coerente.



Seu modulador consiste do esquema mostrado abaixo

Figura 4.26: Modulador DPSK.



O demodulador DPSK é dado pelo seguinte diagrama

Figura 4.27: Demodulador DPSK.

#### 4.5 - Desempenho de sistemas digitais na presença do ruído aditivo [ 2 ], [ 3 ], [ 4 ], [ 5 ], [ 6 ]

Para esta análise, considera-se o mesmo ruído aditivo com distribuição de probabilidade gaussiana com média zero e valor rms igual à  $\sigma$  e densidade espectral igual à  $G(w)=\eta/2$  (4.25).

Considere primeiro o caso ASK. Para este caso o sinal ASK será dado por

$$x(t) = A_k \cos(w_p t + \phi_k) \quad (4.26)$$

Sendo a amplitude  $A_k$  que pode assumir dois valores, e a fase  $\phi_k$  considerada constante.

A recepção é formada pelo filtro passa faixa na entrada seguido do demodulador. A

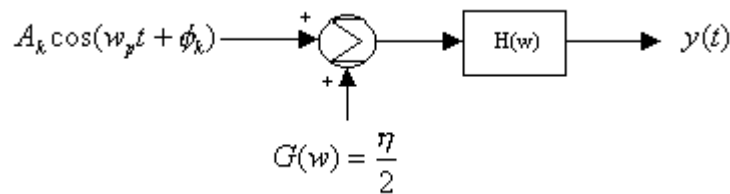


figura abaixo mostra este diagrama

Figura 4.28: Modelo do sinal mais o ruído na entrada do filtro.

O sinal de saída  $y(t)$  é dado pelo ruído passa faixa ( devido ao filtro passa faixa ) mais o sinal modulado.

$$y(t) = n_c(t) \cos(w_p t) + n_s(t) \sin(w_p t) + A_k \cos(w_p t + \phi_k) \quad (4.27)$$

Este sinal  $y(t)$  pode ser escrito em termos de envoltória e fase, resultando em

$$y(t) = R(t) \cos[w_p t + \phi(t)] \quad (4.28)$$

onde

$$R^2 = (A_k + n_c)^2 + n_s^2 \quad (4.29)$$

$$= \tan^{-1} \left[ \frac{n_s}{A_k + n_c} \right] \quad (4.30)$$

$$= \phi_k + \quad (4.31)$$

Sendo  $n_c$  e  $n_s$  VA gaussianas, então a distribuição da VA  $R$  será

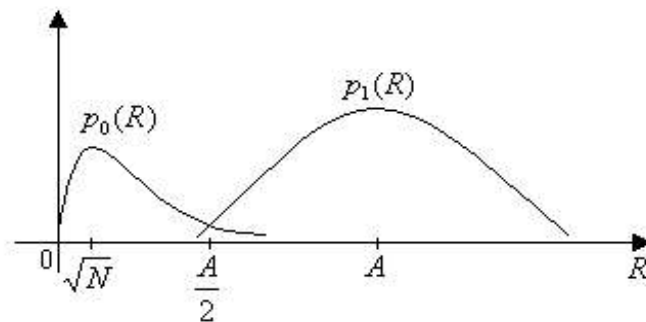
$$p_R(t) = \frac{R}{N} e^{-\frac{(R^2 + A_k^2)}{2N}} I_0 \left( \frac{A_k R}{N} \right) \quad (4.32)$$

Para o caso binário em que  $A_k=0$  representa o dígito 0 ( fonte desligada ) e  $A_k=A \gg \sigma$  onde  $N=\sigma^2$  ( fonte ligada e relação S/N alta ), esta é a distribuição de *Rice* se reduz à distribuição de *Rayleigh* ( para  $A_k=0$  ) ou distribuição gaussiana (  $A_k=A \gg \sigma$  ). Desta explicação tem-se que

$$\text{para bit 0} \rightarrow p_0(t) = \frac{R}{N} e^{-\frac{R^2}{2N}} \quad (4.33)$$

$$\text{para bit 1} \rightarrow p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{(R-A)^2}{2N}} \quad (4.34)$$

A figura abaixo mostra estas duas distribuições e o nível de decisão ótimo do receptor,



que para este caso é próximo de  $A/2$

Figura 4.29: Distribuições de *Rice* (  $p_0(R)$  ) e *gaussiana* (  $p_0(R)$  ).

Como o demodulador ASK é um detetor de envoltória, o sinal recebido será o próprio sinal  $R(t)$ . Tem-se que a probabilidade de erro será

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ e^{-\left(\frac{A}{2}\right)^2} + g\left(\frac{A}{2}\right) \right] \quad (4.35)$$

Desta expressão pode-se concluir que o erro quando o bit 0 é transmitido é maior que quando o 1 é transmitido.

Para o PSK com detecção síncrona, pode-se provar que a probabilidade de erro na recepção será, [ 4 ]

$$P_e = g\left(\frac{A}{2}\right) \quad (4.36)$$

para o sistema DPSK tem-se que

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{(A/2)^2}{2}} \quad (4.37)$$



sendo que a detecção dos sinais assíncronos são feitas com filtro casado, o qual tem-se que

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 = \frac{2E}{\sigma^2} = 2e \quad (4.38)$$

Para poder comparar o desempenho dos vários sistemas, substitui-se a relação anterior por  $2e$ , e tem-se as seguintes equações

$$ASK(\text{n\~ao} - \text{coerente}) \longrightarrow P_e = \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{e}{2}} + g(\sqrt{e}) \right] \quad (4.39)$$

$$FSK(\text{n\~ao} - \text{coerente}) \longrightarrow P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{e}{2}} \quad (4.40)$$

$$DPSK \longrightarrow P_e = \frac{1}{2} e^{-e} \quad (4.41)$$

$$CPSK \longrightarrow P_e = g(\sqrt{2e}) \quad (4.42)$$

Comparando, tem-se que o desempenho do CPSK é melhor que o DPSK, que é melhor que o FSK, que é melhor que o ASK.

$$CPSK > DPSK > FSK > ASK$$